Levensverzekeringswiskunde

en pensioencalculaties

D.P.G. VAN AS, J. KLOUWEN, L.J. VAN DE LEUR

Derde druk

LEVENSVERZEKERINGSWISKUNDE EN PENSIOENCALCULATIES

D.P.G. van As
J. Klouwen
L.J. van de Leur

derde druk

ACADEMIC SERVICE

Meer informatie over deze en andere uitgaven kunt u verkrijgen bij:
Sdu Klantenservice
Postbus 20014
2500 EA Den Haag
tel.: (070) 378 98 80
www.sdu.nl/service

Academic Service is een imprint van Sdu Uitgevers bv.

1e druk, augustus 1998
2e druk, juni 2003
3e druk, april 2012

Zetwerk: Perfect Service, Schoonhoven
Omslagontwerp: Carlito's Design, Amsterdam

ISBN: 978 90 395 2686 6
NUR: 123

Voorwoord

Deze derde druk van *Levensverzekeringswiskunde en pensioencalculaties* is geheel herzien en geactualiseerd. Een aantal hoofdstukken is herschreven. Tevens zijn twee hoofdstukken toegevoegd.

De begrippen 'levensverzekering' en 'pensioen' staan tegenwoordig volop in de belangstelling. Belangrijke oorzaken hiervan zijn de toenemende flexibilisering van de arbeidsmarkt, de steeds kritischer wordende houding van velen t.o.v. bank- en verzekeringsproducten en de ontwikkelingen op de financiële markten sinds 2008. Vragen die actueel zijn en waarschijnlijk ook blijven:

- Hoeveel kapitaal moet ik opbouwen om straks verzekerd te zijn van een goed pensioeninkomen?
- Hoe hoog is de kostenopslag op de netto premie van mijn uitvaartverzekering?
- Welke afkoopwaarde heeft mijn kapitaalverzekering bij leven op dit moment?
- Wat betekent de voorwaarde 'restitutie van de betaalde premies bij overlijden' bij het afsluiten van een persoonlijke lening en vooral: wat kost een dergelijke restitutievoorwaarde?
- Hoe groot is het verschil in de door verzekeraars aan te houden balansvoorziening voor een weduwe- respectievelijk een weduwnaarspensioen?
- Hoeveel kost het vrijmaken van een hypotheek met een daaraan gekoppelde levensverzekering?
- Hoe groot is het effect van de almaar toenemende levensverwachting op de kosten van de pensioenen?
- Wat is het verschil tussen een defined contribution en een defined benefit regeling?
- Welke redenen zijn aan te wijzen voor de enorme verschuiving van eindloonregelingen naar middelloonregelingen die in korte tijd heeft plaatsgevonden?

Deze vragen kunnen worden beantwoord met behulp van de theorie en de berekeningen uit de levensverzekeringswiskunde, ook wel levenactuariaat genaamd. Dit boek is een inleiding in de techniek van de levensverzekeringswiskunde en de toepassing daarvan in de pensioencalculatie. *Levensverzekeringswiskunde en pensioencalculaties* maakt de lezer bekend met de meest voorkomende typen levensverzekeringen. Hoofdstuk 1 behandelt de voor dit boek belangrijkste begrippen uit de financiële rekenkunde. Het hoofdstuk is geheel herschreven is nu op moderne, internationale leest geschoeid met de symbolen S, A, s en a in renteperunages in plaats van percentages.

De berekeningen van koopsommen, premies en voorzieningen zijn gebaseerd op de laatst bekende overlevingstafels: GB 2003-2008. Hoofdstuk 5 (Premies en uitkeringen per jaar en per maand) is vereenvoudigd.

De hoofdstukken 8 (Pensioenen – de opbouw) en 9 (Pensioenen – de financiering) zijn geheel herschreven wegens de veranderde regelgeving en actualiteit.

Nieuw zijn de hoofdstukken 10 (Spaar-en risicopremies) en 11 (Exceltoepassingen). In eerstgenoemde wordt ingegaan op de verdeling van een premie van een levensverzekering in een deel voor sparen en een deel van risico van jaar tot jaar. Wegens de voor de hand liggende toepassingen in spreadsheetprogramma's is tevens een hoofdstuk toegevoegd over Exceltoepassingen bij berekeningen van koopsommen, premies, voorzieningen en dergelijke. Excel kan ook worden ingeschakeld voor het rekenen met elke gewenste overlevingstafel met variabele rentevoet. Dit geeft de mogelijkheid tot een extra verdieping van het inzicht van de effecten die een veranderende markt-rente heeft op levensverzekeringen en pensioenen. Ook het maken van eenvoudige grafieken komt aan de orde, alsmede een pensioenscenario.

De antwoorden en uitwerkingen zijn niet in het boek opgenomen; ze staan op de website van het boek (zie www.academicservice.nl).

Maarn/Amersfoort/Amsterdam, januari 2012

D.P.G van As
J. Klouwen
L.J. van de Leur

Inhoud

1 Financiële rekenkunde

1.1 Inleiding

In dit hoofdstuk worden alle begrippen en technieken uit de financiële rekenkunde behandeld die nodig zijn voor de onderwerpen uit de levensverzekeringswiskunde zoals die in dit boek aan de orde komen. Allereerst wordt aandacht besteed aan een bijzondere rij van getallen, de meetkundige rij. De meetkundige rij is de basis van een aantal belangrijke begrippen uit de financiële rekenkunde.
Op basis van samengestelde interest ('rente op rente') komen vervolgens de begrippen eindwaarde en contante waarde van een kapitaal aan de orde.
Onder het begrip rente wordt in de financiële rekenkunde verstaan: een serie betalingen of ontvangsten. In de laatste twee paragrafen wordt ingegaan op de grondslagen van de berekening van eindwaarde en contante waarde van zo'n rente.

1.2 Meetkundige rijen

Een rij is een serie getallen. Ieder getal in zo'n rij heet een term. Het is gebruikelijk om deze termen te nummeren:

$$t_1, t_2, t_3, ..., t_{n-1}, t_n$$

De getallen 1, 2, 3, ..., n worden rangnummers van de termen genoemd. De eerste term t_1 wordt ook wel aanvangsterm (genoteerd door de letter a) genoemd.
Er kan ook sprake zijn van een oneindig voortlopende rij; de termen van zo'n rij zijn dan alleen bekend als voor iedere term een duidelijk verband bestaat met het bijbehorende rangnummer.

Een meetkundige rij is een rij waarvoor geldt dat iedere term ontstaat door de voorafgaande term met een vast getal te vermenigvuldigen; een rij waarvan de termen dus exponentieel groeien.
Dat vaste getal wordt de reden (r) van de rij genoemd.
Dus:

$$t_n = r \cdot t_{n-1}$$

of, anders geschreven:

$$\frac{t_n}{t_{n-1}} = r$$

Voorbeelden

Rij I 2; 4; 8; 16; ...; 512; 1024
Rij II 30.000; 3.000; 300; ...; 0,003; 0,0003
Rij III 1; 1,08; $(1,08)^2$; $(1,08)^3$; ...; $(1,08)^{60}$
Rij IV p; –p; p; –p; ...

- Rij I is een meetkundige rij met reden 2 en met 10 termen, dus met $a = t_1 = 2$, $r = 2$ en $n = 10$.
- Rij II is een meetkundige rij met reden 0,1 en met 9 termen, dus met $a = 30.000$, $r = 0,1$ en $n = 9$.
- Rij III is een meetkundige rij met reden 1,08 en met 61 termen, dus met $a = 1$, $r = 1,08$ en $n = 61$.
- Rij IV is een oneindig voortlopende rij met $a = p$ en reden -1.

In het algemeen kunnen de termen van een meetkundige rij dus als volgt worden geschreven:

$$
\begin{aligned}
t_2 &= t_1 \cdot r = ar \\
t_3 &= t_2 \cdot r = ar \cdot r \quad = ar^2 \\
t_4 &= t_3 \cdot r = ar^2 \cdot r \quad = ar^3 \\
&\ \ \vdots \\
t_{16} &= t_{15} \cdot r \qquad\qquad = ar^{15}
\end{aligned}
$$

De term met rangnummer n is dus te vinden door de eerste term achtereenvolgens $n - 1$ keer te vermenigvuldigen met r:

$$t_n = a \cdot r^{n-1}$$

Als we de som van een groot aantal termen van een meetkundige rij willen bepalen, kunnen we gebruikmaken van een eigenschap die voor de termen van een meetkundige rij geldt: als we alle termen van een meetkundige rij vermenigvuldigen met de reden, dan ontstaat een tweede meetkundige rij waarvan op twee termen na alle termen gelijk zijn aan die van de eerste rij.

Aan de hand van een voorbeeld kijken we weer hoe de berekening dan in zijn werk gaat. Stel we willen de volgende optelling maken:

$$1,08^2 + 1,08^3 + 1,08^4 + ... + 1,08^{30} + 1,08^{31}$$

Dit is de som (s) van 30 termen van een meetkundige rij met als eerste term $1,08^2$ en reden 1,08. Als we nu alle termen van die rij vermenigvuldigen met 1,08 en die termen vervolgens optellen, krijgen we:

$$1,08 \cdot s = 1,08^3 + 1,08^4 + 1,08^5 + ... + 1,08^{31} + 1,08^{32}$$

Als we nu van de tweede som de eerste som aftrekken, leidt dat tot (let op hoe de termen onder elkaar worden geplaatst):

$$
\begin{array}{rcl}
1{,}08 \cdot s & = & \phantom{1{,}08^2 +{}} 1{,}08^3 + 1{,}08^4 + \ldots + 1{,}08^{31} + 1{,}08^{32} \\
s & = & 1{,}08^2 + 1{,}08^3 + 1{,}08^4 + \ldots + 1{,}08^{31} \\
\hline
0{,}08 \cdot s & = & 1{,}08^{32} \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad - 1{,}08^2
\end{array}
\quad -
$$

Hieruit volgt:

$$s = \frac{1{,}08^{32} - 1{,}08^2}{0{,}08} = 132{,}13$$

Generalisatie van het voorafgaande voorbeeld levert:

$$
\begin{array}{rcl}
rs_n & = & \phantom{a +{}} ar + ar^2 + ar^3 + \ldots + ar^{n-2} + ar^{n-1} + ar^n \\
s_n & = & a + ar + ar^2 + ar^3 + \ldots + ar^{n-2} + ar^{n-1} \\
\hline
rs_n - s_n & = & ar^n - a = a(r^n - 1)
\end{array}
\quad -
$$

Dus: $(r - 1)s_n = a(r^n - 1)$, ofwel:

$$s_n = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1}$$

De som van de eerste n termen van een meetkundige rij met aanvangsterm $t_1 = a$ en reden r (ongelijk aan 1) kan ook geschreven worden als:

$$s_n = a \cdot \frac{r^n - 1}{r - 1}$$

Opmerking. Als r kleiner is dan 1, kan het handig zijn in de breuk teller en noemer te vermenigvuldigen met –1. De formule luidt dan:

$$s_n = a \cdot \frac{1 - r^n}{1 - r}$$

Voorbeeld 1.1

Gegeven is een meetkundige rij met $t_1 = 2$ en $t_7 = 1.458$.
Gevraagd worden r en t_{10}.

We dienen als volgt te werk te gaan: $t_7 = t_1 \cdot r^6$. Hieruit volgt:

Dus is $t_{10} = t_1 \cdot r^9 = 2 \cdot 3^9 = 39.366$.

Voorbeeld 1.2

Gegeven is een meetkundige rij met $t_5 = 1$ en reden ½. Gevraagd wordt s_{10}.

Eerst moet t_1 berekend worden. Er geldt:

$$t_5 = t_1 \cdot r^4$$

Dus: $1 = t_1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 \Rightarrow t_1 = 32$

Hieruit volgt:

$$s_{10} = 16 \cdot \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{10} - 1}{\frac{1}{2} - 1} = 31{,}97$$

Voorbeeld 1.3

Gegeven is een meetkundige rij met $t_1 = 12$, $r = \frac{1}{2}$ en $t_n = \frac{3}{8}$.
Gevraagd worden n en sn.

Uit de gegevens volgt: $\frac{3}{8} = 12 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

Dus: $\frac{1}{32} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

Hieruit volgt: $n - 1 = \frac{\log \frac{1}{32}}{\log \frac{1}{2}} = 5$

Zodat n = 6

Verder is:

$$s_n = s_6 = t_1 \cdot \frac{r^6 - 1}{r - 1} = 12 \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^6}{\frac{1}{2}} = 23\tfrac{5}{8}$$

1.3 Eindwaarde van een kapitaal

Een kapitaal, op tijdstip 0, aangegeven door K(0), staat op een bank gedurende een aantal jaren op basis van samengestelde interest tegen een bepaald percentage per jaar, zeg p. Na 1 jaar is dit startkapitaal K(0) (ook aanvangswaarde genoemd) dus met p% gegroeid. Het kapitaal na 1 jaar, K(1), is te berekenen door K(0) te vermenigvuldigen met de factor:

$$1 + \frac{p}{100} \quad \text{ofwel} \quad 1 + i$$

Hierin is i het zogenaamde interestperunage. Dit getal i heet ook wel de groeivoet of de interestvoet van het kapitaal. Er geldt dus: K(1) = K(0) · (1 + i).
Dit kapitaal K(1) staat dan weer een jaar uit tegen p%. Na 2 jaar is het kapitaal dan gelijk aan K(2) = K(1) · (1 + i).

Na 3 jaar is het kapitaal aangegroeid tot $K(2) \cdot (1 + i)$.
Na n jaar is het kapitaal aangegroeid tot $K(n - 1) \cdot (1 + i)$.
Dus:

$$K(1) = K(0) \cdot (1 + i)$$
$$K(2) = K(1) \cdot (1 + i) = K(0) \cdot (1 + i) \cdot (1 + i)$$
$$K(3) = K(2) \cdot (1 + i) = K(1) \cdot (1 + i) \cdot (1 + i) = K(0) \cdot (1 + i) \cdot (1 + i) \cdot (1 + i)$$

Ofwel:

$$K(1) = K(0) \cdot (1 + i)$$
$$K(2) = K(0) \cdot (1 + i)^2$$
$$K(3) = K(0) \cdot (1 + i)^3$$

En dus na n jaar:

$$K(n) = K(0) \cdot (1 + i)^n$$

Men noemt $K(n)$ de eindwaarde (afkorting: EW) of slotwaarde van een kapitaal na n jaar sparen op basis van samengestelde interest bij een interestperunage (groeivoet) i, ofwel een interestpercentage van $100 \cdot i$. In dit verband wordt n wel de looptijd genoemd. Er is hier dus sprake van exponentiële groei, want de variabele n komt hier als exponent voor.
De bovenstaande formule is dus het bij dit probleem passende groeimodel met groeifactor $1 + i$.

In de financiële rekenkunde wordt $(1 + i)^n$ aangegeven met het symbool $S_{\overline{n\rceil}\, i}$ waarbij:
- S voor slotwaarde staat;
- het symbool $\rceil$ een duurhaak heet;
- n het aantal perioden is, genoteerd onder de duurhaak; en
- i de groeivoet per periode is.

Voorbeeld 1.4

Een kapitaal van € 14.000,– staat gedurende 10 jaar uit tegen 5,8% interest per jaar op basis van samengestelde interest.
Bereken de eindwaarde (slotwaarde).

De groeifactor is hier 1,058; de looptijd is 10 jaar.
Het eindkapitaal is dan:

$$14.000 \cdot S_{10\rceil\, 0{,}058}\ 14.000 \cdot 1{,}058^{10} = 24.602{,}81 \text{ euro}$$

(calculator: $1.058\ x^y\ 10 =$)

Opmerking. In de financiële rekenkunde wordt soms aan het woord rente een andere betekenis gegeven dan in het dagelijks leven het geval is. Waar in het dagelijks leven van het woord rente gebruik wordt gemaakt, is in de financiële rekenkunde sprake van interest, terwijl het woord rente in de financiële rekenkunde wordt gereserveerd voor een serie periodiek vervallende geldbedragen (bijvoorbeeld ‘lijfrente’).

1.4 Contante waarde van een kapitaal

Onder de contante waarde (afkorting: CW) van een kapitaal K verstaan we het startkapitaal K(0) dat nodig is om op basis van samengestelde interest over een zekere looptijd het bedrag K als eindwaarde te verkrijgen.
In symbolen geschreven: $K = K(0) \cdot (1 + i)^n$ wordt dan:

$$K(0) = K \cdot \frac{1}{(1+i)^n} = \frac{K}{(1+i)^n}$$

of

$$K(0) = K \cdot (1 + i)^{-n}$$

In de financiële rekenkunde wordt $\frac{1}{(1+i)^n}$ of $(1 + i)^{-n}$ genoteerd als $A_{\overline{n}|\,i}$. De letter A staat voor aanvangswaarde.

Voorbeeld 1.5

Iemand wil over 15 jaar een bedrag van € 50.000,– hebben gespaard op basis van samengestelde interest. Het door de bank gehanteerde interestpercentage is 6,7.
Welk bedrag moet nu op de bank worden gezet, met andere woorden, wat is de contante waarde van die € 50.000,–?

De groeifactor is 1,067 en de looptijd is 15 jaar. Het eindkapitaal is € 50.000,– en het benodigde beginkapitaal is dan:

$$K(0) = 50.000 \cdot A_{\overline{15}|\,0,067} = \frac{50.000}{1,067^{15}} = 50.000 \cdot 1,067^{-15} = 18.901,82 \text{ euro}$$

Het is eenvoudig in te zien dat in het algemeen geldt:

$$A_{\overline{n}|\,i} = \frac{1}{S_{\overline{n}|\,i}} \quad \text{ofwel} \quad A_{\overline{n}|\,i} \cdot S_{\overline{n}|\,i} = 1$$

1.5 Gelijkwaardige percentages – effectieve en nominale interest

Veel postorderbedrijven rekenen een debetrente met een vast percentage over een periode van 4 weken. Stel een dergelijk bedrijf rekent een debetrente van 0,8% over 4 weken. Met welk percentage op jaarbasis is dit te vergelijken, uitgaande van samengestelde interest?
Anders gezegd: bereken het effectieve interestpercentage op jaarbasis.

De groeifactor over een periode van 4 weken is 1,008. Over een jaar betekent dit 13 perioden, dus de groeifactor op jaarbasis bedraagt $1{,}008^{13}$ ofwel circa 1,10941, hetgeen inhoudt dat de effectieve rente of effectieve interest per jaar circa 10,94% bedraagt. We zeggen wel dat 0,8% en 10,94% in dit geval gelijkwaardige (equivalente) percentages zijn.

Bij de meeste hypotheekleningen wordt in de overeenkomst een percentage op jaarbasis genoemd, het zogeheten nominale interestpercentage. Doorgaans wordt echter door de bank het op jaarbasis, achteraf, verschuldigde bedrag in twaalf gelijke maandelijkse termijnen verrekend. Dat houdt in dat de geldlener per jaar *effectief* meer betaalt dan het afgesproken (nominale) percentage.

Als i de jaarlijkse interest op de financiële markt is en f is de jaarlijkse inflatie, dan is 1 (euro) geïnvesteerde in het begin van het jaar gegroeid naar (1 + i) aan het eind van dat jaar. Echter, de reële waarde is gelijk aan (1 + i)/(1 + f).
Dus het reële rendement is gelijk aan:

$$i_{\text{reëel}} = \frac{1+i}{1+f} - 1 = \frac{i-f}{1+f}$$

Voor kleine waarden van f geldt:

$$i_{\text{reëel}} = \frac{i-f}{1+f} \approx i - f$$

Voorbeeld 1.6

Stel een geldlener is 4,5% interest op jaarbasis verschuldigd aan de betreffende bank. Er wordt op de lening niet afgelost. De bank brengt de geldlener maandelijks 1/12 deel van de jaarlast in rekening. Dat betekent dat de geldlener maandelijks 4,5/12 procent ofwel 0,375% moet betalen. De groeifactor per maand bedraagt dus 1,00375. Op jaarbasis is de groeifactor dus gelijk aan $1{,}00375^{12}$ ofwel circa 1,0459. Anders gezegd: de effectieve interest op jaarbasis bedraagt 4,59% waar de nominale interest 4,5% bedraagt.

Voorbeeld 1.7

Met welk effectief maandpercentage komt een percentage van 9,8 per jaar overeen?

Antwoord:
De groeifactor per jaar bedraagt 1,098 dus per maand zal de groeifactor $1{,}098^{\frac{1}{12}}$ ofwel circa 1,00782 bedragen. Dit betekent een effectief maandpercentage van 0,782.

Voorbeeld 1.8

Met welk effectief jaarpercentage komt een percentage van 1,2 per 4 weken overeen?

Antwoord:
De groeifactor per 4 weken bedraagt 1,012 dus per jaar zal de groeifactor $1{,}012^{13}$ ofwel circa 1,1677 bedragen. Dit betekent effectief 16,77% per jaar.

Equivalente percentages

De samengestelde waarde van eindkapitaal S stijgt als het aantal rente-uitkeringen in jaar stijgt, gegeven een bepaalde nominale interest. Twee nominale interestperunages heten equivalent ze als overeenkomen met hetzelfde effectieve perunage.
We noteren $i^{(m)}$ als de nominale interest die m keer per periode (dus ter grootte $i^{(m)}/m$) wordt gedaan, en definiëren de effectieve interest i als de samengesteld interest in die periode.

Voorbeeld 1.9

Een jaarlijkse rentevergoeding van 12% nominaal, de rentebijschrijving geschiedt halfjaarlijks.
Bereken het effectieve rentepercentage op jaarbasis.

Het gevraagde antwoord is

$$i^{(2)} = 0{,}12 \quad \Rightarrow \quad i = 1{,}06^2 - 1 = 0{,}1236 \quad \text{dus} \quad i = 12{,}36\%$$

Voorbeeld 1.10

Een bank biedt drie soorten gegarandeerde investeringscertificaten aan, met $i^{(12)}$ = 11¼%, $i^{(2)}$ = 11½%, en $i^{(1)}$ = 11¾%. Wat is de beste keuze?

We berekenen de (jaarlijkse)effectieve interest voor elke $i^{(m)}$:

$$i^{(12)} = 11\tfrac{1}{4}\% \quad \Rightarrow \quad i = \left(1 + \frac{0{,}1125}{12}\right)^{12} - 1 = 0{,}1185$$

$$i^{(2)} = 11\tfrac{1}{2}\% \quad \Rightarrow \quad i = \left(1 + \frac{0{,}115}{2}\right)^{2} - 1 = 0{,}1183$$

$$i^{(1)} = 11\tfrac{3}{4}\% \quad \Rightarrow \quad i = 0{,}1175$$

Het certificaat met $i^{(12)} = 11¼\%$ heeft de hoogste effectieve interest.

Voorbeeld 1.11

Een bedrag wordt 3 jaar geïnvesteerd. In het eerste jaar is het rendement $i^{(12)} = 15\%$, in het tweede jaar $i^{(4)} = 10\%$, en in het derde jaar $i^{(365)} = 12\%$. Bepaal de effectieve interest, die overeenkomt met hetzelfde bedrag aan het eind van die 3 jaar. De gemiddelde effectieve interest wordt het meetkundig gemiddelde rendement genoemd.

$$(1+i)^3 = \left(1 + \frac{0{,}15}{12}\right)^{12} \times \left(1 + \frac{0{,}10}{4}\right)^{4} \times \left(1 + \frac{0{,}12}{365}\right)^{365} = 1{,}4446 \quad \Rightarrow$$

$$i = 1{,}4446^{\frac{1}{3}} - 1 = 0{,}1304 = 13{,}04\%$$

Opmerking. Het is belangrijk onderscheid te maken tussen het rekenkundige en het meetkundige gemiddelde. De definities zijn als volgt.

Het rekenkundig gemiddelde (RG of $\bar{x}$) van de getallen $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ is:

$$RG = \frac{\sum_{j=1}^{j=n} x_j}{n} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n}{n}$$

en het meetkundig gemiddelde (MG) is:

$$MG = \left(\prod_{j=1}^{j=n} x_j\right)^{\frac{1}{n}} = (x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot \ldots \cdot x_n)^{\frac{1}{n}}$$

Voorbeeld 1.12

Stel dat iemand een bedrag ter grootte van € 1.000,– op de bak zet. De eerst vijf jaren wordt er 4% per jaar vergoed, en de daaropvolgende 8 jaar 12%.
De groeifactoren zijn 1,04 en 1,12.

Het (meetkundige) gemiddelde van deze groeivoeten is dan:

$$\left(1,04^5 \cdot 1,12^8\right)^{\frac{1}{13}} = 1,0885$$

We noemen dan 8,85% het meetkundig gemiddelde.

1.6 Eindwaarde van een rente

In de financiële rekenkunde verstaat men onder een rente een reeks geldelijke uitkeringen is die regelmatig betaalbaar zijn. Stel dat jaarlijks op 30 december een bedrag van € 2.000,– op een spaarrekening wordt gestort en dat men wil berekenen hoe hoog het saldo op deze rekening zal zijn direct na de 10de storting. Om overzicht te verkrijgen maken we de volgende tijdlijn:

									EW
2.000	2.000	2.000	2.000	2.000	2.000	2.000	2.000	2.000	2.000
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

We hebben ervoor gekozen de bedragen aan het eind van de betreffende periode te situeren, omdat het saldo berekend moet worden zoals dat zal zijn direct na de 10de storting. Uitgaande van een interestvergoeding van 5% per jaar komen we tot de volgende berekening:

Saldo = $2.000 \times 1,05^9 + 2.000 \times 1,05^8 + 2.000 \times 1,05^7 + ... + 2.000 \times 1,05 + 2.000$

Er is hier sprake van de som van tien termen uit een meetkundige rij. We kunnen kiezen uit de volgende twee manieren van aanpak:

1. De eerste term is $2000 \times 1,05^{10}$ en de reden (groeifactor) is 1,05 ;
2. De eerste term is 2000 en reden (groeifactor) is 1,05 (lees de rij van rechts naar links).

Het moge duidelijk zijn dat aanpak 2 eenvoudiger is. We komen tot:

$$s_{10} = 2.000 \times \frac{1,05^{10} - 1}{0,05} = 25.155,79 \text{ euro}$$

(zie de somformule in paragraaf 1.2)

Als we in dit voorbeeld looptijd, interestpercentage en bedrag van storting veranderen, zal de berekening toch op precies dezelfde wijze verlopen. Generaliserend komen we bij een looptijd n, interestpercentage p en te storten bedragen ter hoogte T tot:

$$s_n = T \times \frac{\left(1+\frac{p}{100}\right)^n - 1}{1+\frac{p}{100}-1} = T \times \frac{\left(1+\frac{p}{100}\right)^n - 1}{\frac{p}{100}}$$

Als we in plaats van het interestpercentage nu het interestperunage ofwel interestgroeivoet nemen en die i noemen, ziet de formule er eenvoudiger uit:

$$s_n = T \times \frac{(1+i)^n - 1}{1+i-1} = T \times \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

De eindwaarde wordt in het softwarepakket Excel bij de financiële functies aangegeven met de afkorting TW (Toekomstige Waarde; in het Engels: FV van Future Value).

De factor waarmee T vermenigvuldigd moet worden wordt aangeduid met het symbool $s_{\overline{n|}\,i}$, dus:

$$s_{\overline{n|}\,i} = \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

Voorbeeld 1.13

Ter aanvulling van haar pensioen wil mevrouw A. jaarlijks een bedrag van € 3.000,– gaan inleggen op een spaarrekening waarop een vaste interestvergoeding van 4% per jaar van toepassing is. Bereken het saldo op de rekening van A. zoals dat zal zijn direct na de 30ste inleg.

$$\text{Saldo} = 3.000 \times s_{\overline{30|}\,0{,}04} = 3.000 \times \frac{1{,}04^{30} - 1}{0{,}04} = 168.254{,}81 \text{ euro.}$$

Voorbeeld 1.14

Stel dat A. uit voorbeeld 1.13 een saldo wil bereiken van € 300.000,–. Hoe hoog moet de inleg dan zijn? De oplossing verloopt als volgt:

$$300.000 = T \times s_{\overline{30|}\,0{,}04} = T \times \frac{1{,}04^{30} - 1}{0{,}04} \quad \Rightarrow$$

$$T = 300.000 \times \frac{0{,}04}{1{,}04^{30} - 1} = 5.349{,}03 \text{ euro}$$

Voorbeeld 1. 15

Bereken het saldo zoals dat zal zijn direct na de 360ste maandelijkse inleg van € 50,– op een spaarrekening, waarvoor geldt dat een vaste interest wordt vergoed van 4,5% op jaarbasis.

Nu moet eerst de omrekening naar de maandelijkse interest worden gemaakt (we noteren 7 decimalen; de drie punten geven aan dat er nog meer decimalen zijn):

$$i = 1,045^{\frac{1}{12}} - 1 = 0,0036748...$$

$$\text{Saldo} = 50 \times s_{\overline{360|}\,0,0036748...} = 50 \times \frac{1,0036748...^{360} - 1}{0,0036748...} = 37.353,20 \text{ euro}$$

Voorbeeld 1.16

Michiel ziet bij een autodealer een aanbieding van een sportauto die hij altijd al had willen hebben: € 20.000,– ineens en vervolgens maandelijks € 695, gedurende 5 volle jaren, waarbij de door de dealer te berekenen maandelijkse interest 1,25% bedraagt. De eerste termijn vervalt precies één maand na aankoop. Michiel vraagt zich af hoeveel geld hij zou hebben, direct na de betaling van de laatste termijn, als hij die € 20.000,– en de termijnen zou sparen tegen het door de dealer genoemde interestpercentage.

								EW	
20.000	695	695	695	695	...	695	695	695	695
|——|	——|	——|	——|	——	...	——|	——|	——|	——| 1,25%
	1	2	3	4		58	59	60	

$$EW = 695 \times s_{\overline{60|}\,0,0125} + 20.000 \times S_{\overline{60|}\,0,0125}$$

$$= 695 \times \frac{1,0125^{60} - 1}{0,01254} + 20.000 \times 1,0125^{60} = 103.702,91$$

Michiel zou dan een bedrag van circa € 103.703,– hebben gespaard.

1.7 Contante waarde van een rente

We beschouwen weer de aanbieding van de autodealer in voorbeeld 1.16 in de vorige paragraaf: € 20.000,– ineens en vervolgens maandelijks € 695,– gedurende 5 volle jaren, waarbij de door de dealer te berekenen maandelijkse interest 1,25% bedraagt. De eerste termijn vervalt precies 1 maand na aankoop.
Michiel vraagt zich af wat de contante waarde is van deze betalingen.
Hier is sprake van de contante waarde van een postnumerando rente: de maandelijkse betalingen zijn steeds aan het eind van de maand.

We geven het probleem met behulp van een tijdlijn weer:

CW
20.000 695 695 695 695 695 695 695 695
|——|——|——|——|—— ... ——|——|——|——| 1,25%
1 2 3 4 58 59 60

De contante waarde van de eerste termijn is: $695 \times A_{\overline{1|}\,0,0125} = 695 \times 1{,}0125^{-1}$;

de contante waarde van de tweede termijn is: $695 \times A_{\overline{2|}\,0,0125} = 695 \times 1{,}0125^{-2}$;

de contante waarde van de derde termijn is: $695 \times A_{\overline{3|}\,0,0125} = 695 \times 1{,}0125^{-3}$;

de contante waarde van de vierde termijn is: $695 \times A_{\overline{4|}\,0,0125} = 695 \times 1{,}0125^{-4}$;

.
.
.

de contante waarde van de 59ste termijn is: $695 \times A_{\overline{59|}\,0,0125} = 695 \times 1{,}0125^{-59}$;

de contante waarde van de 60ste termijn is $695 \times A_{\overline{60|}\,0,0125} = 695 \times 1{,}0125^{-60}$.

De totale contante waarde van de termijnen is dus te schrijven als:

$$695 \times (A_{\overline{1|}\,0,0125} + A_{\overline{2|}\,0,0125} + A_{\overline{3|}\,0,0125} + \ldots + A_{\overline{59|}\,0,0125} + A_{\overline{60|}\,0,0125})$$

ofwel als:

$$695 \times (1{,}0125^{-1} + 1{,}0125^{-2} + 1{,}0125^{-3} + \ldots + 1{,}0125^{-59} + 1{,}0125^{-60})$$

Deze som is op te vatten als de som van de termen van een meetkundige rij bestaande uit 60 termen; de eerste term en de reden zijn beide gelijk aan $1{,}0125^{-1}$.
Met de somformule van een meetkundige rij volgt nu:

$$s_{60} = 695 \times 1{,}0125^{-1} \times \frac{(1{,}0125^{-1})^{60} - 1}{1{,}0125^{-1} - 1} = 695 \times \frac{1}{1{,}0125^{1}} \times \frac{(1{,}0125^{-1})^{60} - 1}{1{,}0125^{-1} - 1} \Rightarrow$$

$$s_{60} = 695 \times \frac{(1{,}0125^{-1})^{60} - 1}{1 - 1{,}0125} = 695 \times \frac{1 - 1{,}0125^{-60}}{0{,}0125} = 29.214$$

De contante waarde is dus 29.214 + 20.000 = 49.214,– euro.

Met behulp van een symbool wordt de som van de contante waarden van de termijnen geschreven als:

$$CW = 695 \times a_{\overline{60|}\,0,0125} = 695 \times \frac{1 - 1{,}0125^{-60}}{0{,}0125}$$

Merk op dat oprenten van € 49.214,– over 60 maanden tegen 1,25% per maand een bedrag van € 103.703,– oplevert, wat de eindwaarde was als Michiel de termijnbedragen en de € 20.000,– zou sparen tegen 1,25% per maand.

De contante waarde van een postnumerando rente, bestaande uit n termijnen ter groot-te T bij een percentage p per periode, is te schrijven als:

$$CW = T \times a_{\overline{n|}\,i} = T \times \frac{1-(1+i)^{n}}{i}$$

De contante waarde wordt in het softwarepakket Excel bij de financiële functies aan-gegeven met de afkorting HW (Huidige Waarde; in het Engels: PV van Present Value).

Voorbeeld 1.17

Bereken de contante waarde van een schuld die bestaat uit 30 jaarlijkse termijnen van ieder € 8.500,– op basis van een gelijkblijvende interest van 5,6% per jaar. De eerste termijn moet worden voldaan over precies één jaar.

$$CW = 8.500 \times a_{\overline{30|}\,0{,}056} = 8.500 \times \frac{1-1{,}056^{-30}}{0{,}056} = 122.184 \text{ euro}$$

Voorbeeld 1.18

Een schuld van € 47.000 moet worden afgelost in 25 jaarlijkse termijnen op basis van een interest van 7% per jaar. Bereken de hoogte van de termijnbedragen.

$$47.000 = T \times a_{\overline{25|}\,0{,}07} = T \times \frac{1-1{,}07^{-25}}{0{,}07} \quad \Rightarrow$$

$$T = 47.000 \times \frac{0{,}07}{1-1{,}07^{-25}} = 4.033{,}09 \text{ euro}$$

1.8 Pre- en postnumerando

In de vorige paragrafen hebben we steeds renten bekeken waarvan de termijnen aan *het eind* van de perioden vervielen. Men noemt dit postnumerando renten.
We kunnen ook kijken naar prenumerando renten, renten waarvan de termijnen aan *het begin* van de perioden vervallen.

In het geval van een eindwaardeberekening van een prenumerando rente betekent dat iedere termijn één periode langer rentedragend is, zodat iedere term moet worden ver-menigvuldigd met 1+ i.
Stel dat we de eindwaarde willen berekenen van 10 jaarlijkse termijnen van ieder € 2.000,– zoals die zal zijn precies één jaar na de 10de storting.
De bijbehorende tijdlijn ziet er dan als volgt uit:

	2.000	2.000	2.000	2.000	2.000 ...	2.000	2.000	2.000	2.000	EW
jaar:	1	2	3	4	...	7	8	9	10	

Saldo $= 2.000 \times 1{,}05^{10} + 2.000 \times 1{,}05^{9} + 2.000 \times 1{,}05^{8} + \ldots + 2.000 \times 1{,}05$
$= 1{,}05 \times (2.000 \times 1{,}05^{9} + 2.000 \times 1{,}05^{8} + \ldots + 2.000 \times 1{,}05 + 2.000)$

Dit is dus 1,05 keer zo groot als het saldo uit het begin van paragraaf 1.5.
Merk op dat ook de factor 2000 nog buiten de haken kan:
Saldo $= 1{,}05 \times 2.000 \times (1{,}05^{9} + 1{,}05^{8} + \ldots + 1{,}05 + 1) = 1{,}05 \times 2.000 \times s_{\overline{10|}\,0{,}05}$.
Deze vorm wordt ook wel geschreven als $2.000 \times \ddot{s}_{\overline{10|}\,0{,}05}$.

In het geval van een berekening van een contante waarde van een prenumerando rente geldt dat iedere termijn één periode minder moet worden afgerent, hetgeen betekent dat ook hier iedere term moet worden vermenigvuldig met 1+i.

Algemeen geldt dus: ‘<u>pre</u>numerando’ = (1+i) × ‘<u>post</u>numerando’.

In symbolen:

$$\ddot{s}_{\overline{n|}\,i} = (1+i) \times s_{\overline{n|}\,i} \quad \text{en} \quad \ddot{a}_{\overline{n|}\,i} = (1+i) \times a_{\overline{n|}\,i}$$

met

$$s_{\overline{n|}\,i} = \frac{(1+i)^{n} - 1}{i} \quad \text{en} \quad a_{\overline{n|}\,i} = \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

die ook als volgt kunnen worden geschreven:

$$s_{\overline{n|}\,i} = \frac{S_{\overline{n|}\,i} - 1}{i} \quad \text{en} \quad a_{\overline{n|}\,i} = \frac{1 - A_{\overline{n|}\,i}}{i}$$

Voorbeeld 1.19

De moeder van een pasgeboren zoon, Klaas, is van plan om met ingang van 15 januari a.s. jaarlijks € 1.000,– op een speciale kinderspaarrekening te zetten. De bank zal steeds 5,5% interest per jaar vergoeden. Bovendien zal de bank precies één jaar na de 20ste storting een premie van 10% over het dan opgebouwde spaartegoed uitkeren aan Klaas.
Bereken het bedrag van de premie in euro’s nauwkeurig.

Er is hier sprake van de eindwaarde van een prenumerando rente bestaande uit 20 jaarlijkse termijnen van ieder € 1.000,– tegen een interest van 5,5% per jaar.

$$\begin{array}{cccccccccccc} 1.000 & 1.000 & 1.000 & 1.000 & 1.000 & & 1.000 & 1.000 & 1.000 & 1.000 & & \text{EW} \\ \vdash & | & | & | & | & \ldots & | & | & | & | & | & | \\ 1 & 2 & 3 & 4 & & & & 17 & 18 & 19 & 20 & \end{array}$$

$$\text{EW} = 1.000 \times \ddot{s}_{\overline{20|}\,0,055} = 1.000 \times \frac{1,055^{20} - 1}{0,055} = 36.786$$

De premie bedraagt dus 10% × 36.786 = € 3679.

Voorbeeld 1.20

De heer H sluit een spaarcontract af, waarbij hij zich verplicht gedurende vijftien volle jaren iedere maand € 60,– in te leggen. De betreffende bankinstelling zal gedurende de gehele looptijd rekenen met een interest van 6,8% per jaar.
Bereken de eindwaarde precies één maand na de laatste (de 180ste) betaling.

Er is hier sprake van de eindwaarde van een prenumerando rente bestaande uit 180 maandelijkse termijnen van € 60,– ieder tegen een interest van 6,8% per jaar. Het jaarlijkse interestpercentage moet dus eerst omgerekend worden naar het overeenkomstige maandelijkse interestpercentage: de groeifactor per jaar bedraagt 1,068, dus de groeifactor per maand is te berekenen door de twaalfdemachtswortel uit 1,068 te bepalen ofwel:

$$g^{12} = 1,068 \quad \text{dus} \quad g = \sqrt[12]{1,068} = 1,068^{\frac{1}{12}} = 1,0055$$

De interest per maand bedraagt dus circa 0,55%. De eindwaarde is dan:

$$\text{EW} = 60 \times \ddot{s}_{\overline{180|}\,0,0055} = 60 \times \frac{1,0055^{20} - 1}{0,0055} = 18.471$$

NB: Als we zouden doorrekenen met de niet-afgeronde waarde van de twaalfdemachtswortel uit 1,068, komen we uit op 18.466,26. Op een calculator : 1.068 $x^{\frac{1}{y}}$ 12 M^{in} x^{y} 180 – 1 = / (MR – 1) × 60 = .

Voorbeeld 1.21

Marie wil over 10 jaar kunnen beschikken over een bedrag van € 50.000,–. Welk bedrag moet zij maandelijks opzij zetten om, uitgaande van een interestpercentage van 0,5 per maand, het gestelde doel te bereiken?

Stel T is het gevraagde maandelijkse bedrag. Er geldt dan:

$$T \times \ddot{s}_{\overline{120|}\,0{,}005} = T \times \frac{1{,}005^{120} - 1}{0{,}005} = 50.000 \quad \Rightarrow$$

$$T = \frac{1}{1{,}005} \times \frac{0{,}005}{1{,}005^{120} - 1} = 303{,}58$$

Marie moet dus maandelijks € 303,58 sparen.

Voorbeeld 1.22

De jaarpremie voor een bepaald pakket van een ziektekostenverzekering bedraagt € 2.974,–.
Bereken de vergelijkbare (prenumerando) maandpremie op basis van 0,5% per maand.

Stel P de gevraagde maandpremie. Het probleem laat zich met behulp van de volgende tijdlijn uitbeelden:

2. 974

P P P P P ... P P P P

|——|——|——|——|—— ... ——|——|——|——|——| 0,5%

1 2 3 4 9 10 11 12

$$CW = 2.974 = P \times \ddot{a}_{\overline{12|}\,0{,}005} = P \times 1{,}005 \times \frac{1 - 1{,}005^{-12}}{0{,}005} \quad \Rightarrow$$

$$P = \frac{2.974}{1{,}005} \times \frac{0{,}005}{1 - 1{,}005^{-12}} = 254{,}69 \text{ euro}$$

Dus de maandpremie zou € 254,69 moeten bedragen.
In de praktijk verhoogt de maatschappij die maandpremie met een toeslag in verband met te maken extra kosten of brengt een hoger maandpercentage in rekening. (Ga na dat bij 0,6% per maand de premie € 256,07 zou bedragen.)

Voorbeeld 1.23

Bij de aankoop van een nieuwbouwwoning in Amsterdam Centrum zal de koper een erfpachtverplichting met de gemeente moeten aangaan ten aanzien van de grond waarop de woning staat. De verplichting houdt in dat met ingang van 1 januari a.s. jaarlijks een bedrag van € 2500,– verschuldigd is aan de betreffende deelgemeente gedurende 50 jaar. De deelgemeente biedt de mogelijkheid om de erfpachtverplichting bij de aankoop van de woning af te kopen. De afkoopsom zal dan gelijk zijn aan de contante waarde van de 50 bedragen op basis van een jaarlijkse interest van 6%.

Bereken de hoogte van die afkoopsom die per 1 januari a.s. zal moeten worden voldaan.

We geven eerst in een tijdlijn aan wat het probleem is dat moet worden opgelost.

```
 CW
2.500  2.500  2.500  2.500        2.500  2.500  2.500
  |------|------|------|------ ... --|------|------|------| 6%
      1      2      3                  48     49     50
```

Als we de rente opvatten als een *pre*numerando rente geldt:

$$CW = 2500 \times \ddot{a}_{\overline{50|}\,0,06} = 2500 \times 1,06 \times \frac{1-1,06^{-50}}{0,06} = 41.769$$

We hadden de rente ook kunnen opvatten als een *post*numerando rente.
Dan verloopt de berekening als volgt:

$$CW = 2.500 + 2.500 \times a_{\overline{49|}\,0,06} = 2.500 + 2.500 \times \frac{1-1,06^{-49}}{0,06} = 2.500 + 39.269 = 41.769$$

De afkoopsom bedraagt dus € 41.769.

Opgaven

1.1 Van een meetkundige rij is gegeven: $t_1 = 3$ en $r = 2$.
Bereken t_{10} en s_{10}.

1.2 Van een meetkundige rij met een positieve reden is gegeven:
$t_5 = 9 \times t_3$ en $t_6 = 486$.
Bereken r, t_1 en s_{10}.

1.3 Bereken de slotwaarde van een kapitaal van € 20.000,– op basis van samengestelde inetrest bij 4,5% interest per jaar en een looptijd van 7 jaar.

1.4 Mevrouw A. wil op haar 60ste verjaardag beschikken over een spaarsom van € 100.000,–.
Welk bedrag moet ze op haar 30ste verjaardag dan op de bank zetten, als dat bedrag 30 jaar lang op basis van samengestelde interest van 7,5% per jaar op de bank zal staan?

1.5 Bereken de contante waarde van een kapitaal van € 40.000,– bij een rente van 8,2% en een looptijd van 10 jaar.

Register

De begrippen ‘levensverzekering’ en ‘pensioen’ staan volop in de belangstelling. Belangrijke oorzaken hiervan zijn de toenemende flexibilisering van de arbeidsmarkt, een steeds kritischer houding tegenover bank- en verzekeringsproducten en de ontwikkelingen op de financiële markten. Actuele vragen daarbij zijn onder andere:

- Hoeveel kapitaal moet ik opbouwen voor een goed pensioeninkomen?
- Welke afkoopwaarde heeft mijn kapitaalverzekering bij leven op dit moment?
- Hoe groot is het verschil in de door verzekeraars aan te houden balansvoorziening voor een weduwe- respectievelijk een weduwnaarspensioen?
- Hoeveel kost het vrijmaken van een hypotheek met een daaraan gekoppelde levensverzekering?
- Wat is het effect van de toenemende levensverwachting op de kosten van de pensioenen?
- Wat is het verschil tussen een definded contribution en een defined benefit regeling?

Deze en andere vragen kunnen worden beantwoord met behulp van de levensverzekeringswiskunde, ook wel actuariële wiskunde genaamd.

Deze geheel herziene en geactualiseerde derde druk van Levensverzekeringswiskunde en pensioencalculaties maakt de lezer bekend met de meest voorkomende typen levensverzekeringen. Via de berekening van de koopsom voor dergelijke verzekeringen wordt overgegaan op de netto en later ook de bruto premies. Ook de hoogte van zowel netto als bruto (balans)voorziening komt aan de orde. Voorts wordt aandacht besteed aan spaar- en risicopremies. Tot slot komen diverse pensioenbegrippen aan bod, zoals de opbouw van pensioenrecht (ook pensioenaanspraak) en de financiering van collectieve pensioenen. Ook wordt aandacht besteed aan individuele pensioenen (o.a. de DGA en de ZZP’er).

Er is ook aandacht voor de manier waarop Excel kan worden ingeschakeld voor het rekenen met elke gewenste overlevingstafel bij bovendien een variabele rentevoet. Dit geeft inzicht in de effecten van een veranderende rekenrente op levensverzekeringen en pensioenen.

Het boek is geschikt als studieboek voor financiële en fiscale opleidingen op universitair en hbo-niveau en dekt de eindtermen van het onderdeel Levensverzekeringswiskunde in de accountantsopleiding (opgesteld door de CEA) en van het vak Levensverzekeringswiskunde (minor Accountancy) van de opleiding SPD Bedrijfsadministratie. Daarnaast is het een bron van informatie voor financiële planners en betrokkenen uit de verzekeringsbranche.

D.P.G. van As is werkzaam bij de MSc Verzekeringskunde van de Universiteit van Amsterdam en als docent bij de Hogeschool van Amsterdam, drs. J. Klouwen is docent aan de Hogeschool van Amsterdam en drs. L.J. van de Leur is docent aan de Universiteit van Amsterdam.

ISBN 978 90 395 2686 6
NUR 123

ACADEMIC SERVICE

9 789039 526866

www.academicservice.nl