Wiskunde voor bedrijfseconomen

HERBERT HAMERS, BOB KAPER, JOHN KLEPPE

ACADEMIC SERVICE

Wiskunde voor bedrijfseconomen

Herbert Hamers

Bob Kaper

John Kleppe

ACADEMIC
SERVICE

Meer informatie over deze en andere uitgaven kunt u verkrijgen bij:
Sdu Klantenservice
Postbus 20014
2500 EA Den Haag
tel.: (070) 378 98 80
www.sdu.nl/service

De eerste druk van dit boek is verschenen onder de titel *Wiskunde met toepassingen in de micro-economie*.

c 2012 Sdu Uitgevers, Den Haag
Academic Service is een imprint van Sdu Uitgevers bv.

Omslagontwerp: Carlito's Design, Amsterdam

ISBN 978 90 395 2676 7
NUR 123 / 782

Alle rechten voorbehouden. Alle intellectuele eigendomsrechten, zoals auteurs- en databankrechten, ten aanzien van deze uitgave worden uitdrukkelijk voorbehouden. Deze rechten berusten bij Sdu Uitgevers bv en de auteur.

Behoudens de in of krachtens de Auteurswet gestelde uitzonderingen, mag niets uit deze uitgave worden verveelvoudigd, opgeslagen in een geautomatiseerd gegevensbestand of openbaar gemaakt in enige vorm of op enige wijze, hetzij elektronisch, mechanisch, door fotokopieën, opnamen of enige andere manier, zonder voorafgaande schriftelijke toestemming van de uitgever.

Voor zover het maken van reprografische verveelvoudigingen uit deze uitgave is toegestaan op grond van artikel 16 h Auteurswet, dient men de daarvoor wettelijk verschuldigde vergoedingen te voldoen aan de Stichting Reprorecht (Postbus 3051, 2130 KB Hoofddorp, www.reprorecht.nl). Voor het overnemen van gedeelte(n) uit deze uitgave in bloemlezingen, readers en andere compilatiewerken (artikel 16 Auteurswet) dient men zich te wenden tot de Stichting PRO (Stichting Publicatie- en Reproductierechten Organisatie, Postbus 3060, 2130 KB Hoofddorp, www.cedar.nl/pro). Voor het overnemen van een gedeelte van deze uitgave ten behoeve van commerciële doeleinden dient men zich te wenden tot de uitgever.

Hoewel aan de totstandkoming van deze uitgave de uiterste zorg is besteed, kan voor de afwezigheid van eventuele (druk)fouten en onvolledigheden niet worden ingestaan en aanvaarden de auteur(s), redacteur(en) en uitgever deswege geen aansprakelijkheid voor de gevolgen van eventueel voorkomende fouten en onvolledigheden.

All rights reserved. No part of this publication may be reproduced, stored in a retrieval system, or transmitted in any form or by any means, electronic, mechanical, photocopying, recording or otherwise, without the publisher's prior consent.

While every effort has been made to ensure the reliability of the information presented in this publication, Sdu Uitgevers neither guarantees the accuracy of the data contained herein nor accepts responsibility for errors or omissions or their consequences.

Voorwoord

Dit wiskundeboek is gebaseerd op de ervaringen van vele jaren wiskundecolleges aan (bedrijfs)economiestudenten van Tilburg University en lessen die verzorgd zijn voor leerlingen uit het VWO. Daarnaast is het boek "*Wiskunde met toepassingen in de micro-economie*" als uitgangspunt genomen.

Dit heeft ertoe geleid dat op wiskundig gebied het boek beter aansluit op het niveau van de beginnende (bedrijfs)economiestudent. Dit wordt onder andere bereikt door meer aandacht te besteden aan elementaire rekentechnieken (oplossen van (on)gelijkheden, rekenen met machten), het veranderen van de volgorde waarin wiskundige onderwerpen worden aangeboden en het toevoegen van meer voorbeelden en opgaven.

Een andere belangrijke vernieuwing is de **e-learning omgeving** die is ontwikkeld. In deze omgeving worden alle wiskundige onderwerpen uitgelegd door middel van films, tekst en meerkeuzevragen.

Ook zijn er in dit boek nieuwe economische toepassingen opgenomen. Naast de toepassingen in de micro-economie, zoals consumenten- en producentengedrag, wordt er nu ook aandacht besteed aan toepassingen uit de moderne portefeuilletheorie, voorraadmanagement en statistiek.

Dit boek zou niet tot stand zijn gekomen zonder de hulp van een groot aantal collega's die ons door raad en daad terzijde hebben gestaan. Met name willen we hier Ruud Brekelmans, Bart Husslage en Elleke Janssen noemen, die veel werk verricht hebben bij het tot stand komen van de e-learningomgeving. Verder nog extra dank aan Elleke voor haar hulp bij LaTeX, in het bijzonder bij de lay-out en de figuren.

Herbert Hamers
Bob Kaper
John Kleppe

Tilburg, juni 2012

Inhoudsopgave

Voorwoord **v**

Inleiding **xi**

1 Functies van één variabele **1**
1.1 Introductie van functies van één variabele . . . 1
1.2 Overzicht van functies van één variabele . . . 5
1.2.1 Polynoomfuncties . . . 5
1.2.2 Machtfuncties . . . 12
1.2.3 Exponentiële functies . . . 16
1.2.4 Logaritmische functies . . . 18
1.3 Toepassingen . . . 21
1.3.1 Break-even . . . 21
1.3.2 Marktevenwicht . . . 22
1.4 Gemengde opgaven . . . 24

2 Differentiëren van functies van één variabele **27**
2.1 Afgeleide . . . 27
2.2 Differentieerregels . . . 37
2.3 Toepassingen . . . 39
2.3.1 Marginaliteit . . . 39
2.3.2 Elasticiteit . . . 40
2.3.3 Snelheid productieproces . . . 43
2.4 Kettingregel . . . 44
2.5 Inverse functie . . . 48
2.6 Toepassingen . . . 53
2.6.1 Elasticiteit en inverse . . . 53
2.7 Gemengde opgaven . . . 54

3 Functies van twee variabelen **59**
3.1 Introductie van functies van twee variabelen . . . 59
3.2 Overzicht van functies van twee variabelen . . . 61
3.3 Niveaukrommen . . . 62
3.4 Toepassingen . . . 65
3.4.1 Nutsfuncties en indifferentiekrommen . . . 65
3.4.2 Moderne portefeuilletheorie . . . 67
3.5 Gemengde opgaven . . . 68

4 Differentiëren van functies van twee variabelen 71
4.1 Partiële afgeleiden . . . 71
4.2 Toepassingen . . . 77
4.2.1 Partiële marginaliteit . . . 77
4.2.2 Partiële elasticiteit . . . 79
4.3 Kettingregel . . . 82
4.4 Raaklijn aan een niveaukromme . . . 86
4.5 Toepassingen . . . 89
4.5.1 Marginale substitutieverhouding . . . 89
4.6 Gemengde opgaven . . . 93

5 Optimaliseren 97
5.1 Optimaliseren van functies van één variabele . . . 97
5.2 Toepassingen . . . 109
5.2.1 Marginale outputregel en productieregel . . . 109
5.2.2 Aanbodfunctie van een producent . . . 112
5.2.3 Voorraadmanagement . . . 115
5.3 Optimaliseren van functies van twee variabelen . . . 117
5.4 Toepassingen . . . 123
5.4.1 Winstmaximalisatie producent . . . 123
5.4.2 Regressielijn . . . 125
5.5 Optimaliseren van gebonden extremumproblemen . . . 129
5.5.1 Substitutiemethode . . . 133
5.5.2 Eerste-orde criterium voor een gebonden extremum . . . 136
5.5.3 Eerste-orde voorwaarde van Lagrange . . . 140
5.6 Toepassingen . . . 142
5.6.1 Nutsmaximalisatie consument . . . 142
5.6.2 Kostenminimalisering producent . . . 144
5.6.3 Selectie optimale portefeuille . . . 147
5.7 Optimaliseren van convexe en concave functies . . . 152
5.7.1 Convexe en concave functies van één variabele . . . 152
5.7.2 Convexe en concave functies van twee variabelen . . . 155
5.8 Gemengde opgaven . . . 157

6 Oppervlakten en integralen 163
6.1 Integraal . . . 163
6.2 Primitiveren . . . 165
6.3 Oppervlakte en integraal . . . 167
6.4 Toepassingen . . . 177
6.4.1 Consumentensurplus . . . 177
6.4.2 Kansverdelingen . . . 179
6.5 Gemengde opgaven . . . 181

A Antwoorden opgaven **185**
A.1 Antwoorden hoofdstuk 1 185
A.2 Antwoorden hoofdstuk 2 187
A.3 Antwoorden hoofdstuk 3 190
A.4 Antwoorden hoofdstuk 4 192
A.5 Antwoorden hoofdstuk 5 195
A.6 Antwoorden hoofdstuk 6 199
A.7 Figuren behorende bij de antwoorden 202

Index **205**

Inleiding

Deze inleiding geeft eerst een beknopt overzicht van de inhoud van dit boek. Vervolgens bespreken we de opbouw van het boek. Tot slot geven we een korte studeeraanwijzing.

In hoofdstuk 1 introduceren we functies van één variabele. Behalve een overzicht van elementaire functies komen ook het bepalen van nulpunten, oplossen van ongelijkheden en rekenen met machten aan bod.

Hoofdstuk 2 staat in het teken van de afgeleide van een functie van één variabele. Naast een aantal differentieerregels wordt ook de inverse functie besproken en in economische zin de begrippen marginaliteit en elasticiteit.

In hoofdstuk 3 introduceren we functies van twee variabelen en het begrip niveaukromme. Nutsfuncties van een consument en een eerste introductie in moderne portefeuilletheorie worden als economische toepassingen behandeld.

Partiële afgeleiden en partieel differentiëren staan centraal in hoofdstuk 4. Verder wordt het economische begrip marginale substitutieverhouding in verband gebracht met de raaklijn aan een niveaukromme.

Hoofdstuk 5 is geheel gewijd aan het bepalen van extrema van een functie, al dan niet onder nevenvoorwaarden. Als economische toepassingen komen onder andere winstmaximalisatie producent, het Economic Order Quantity model, de regressielijn, nutsmaximalisatie consument, kostenminimalisering producent en optimale investering in aandelen aan de orde. Daarnaast worden convexe en concave functies apart behandeld omdat deze functies in veel economische modellen gebruikt worden.

Tot slot, in hoofdstuk 6 wordt het begrip integraal uitgelegd als middel om de oppervlakte van een gebied te bepalen. We gebruiken de integraal onder meer om het consumentensurplus te bepalen en voor het berekenen van kansen.

In dit boek is gekozen om de wiskundige en economische onderwerpen in aparte paragrafen te behandelen. In een wiskundige paragraaf volgen direct op de invoering van een wiskundig begrip of een wiskundige techniek een (wiskundig) voorbeeld en een opgave. Het voorbeeld is vaak een uitwerking of een toelichting van het betreffende begrip of van de wiskundige techniek; de opgave is een middel om het begrip of de techniek te doorgronden. Eenzelfde opmerking aangaande de opgaven kunnen we geven voor de economisch geöriënteerde paragrafen.

Elk hoofdstuk wordt afgesloten met een paragraaf gemengde opgaven. Van alle opgaven zijn de antwoorden opgenomen in de appendix. Van een selectie van de opgaven zijn de volledige uitwerkingen te vinden op de website www.academicservice.nl behorende bij het boek.

Een eerste stap om wiskunde te leren begrijpen is door alle colleges die je universiteit aanbiedt te volgen. Echt begrijpen kun je wiskunde alleen maar door zelf de opgaven (proberen) te maken. Het zal niet altijd lukken om meteen elke opgave op te lossen. Dan

is het raadzaam om nogmaals het voorbeeld dat direct voor de opgave staat te bestuderen. Als dit niet voldoende is, zul je nogmaals in de tekst van het boek moeten duiken. Een andere optie is om gebruik te maken van de e-learning omgeving. Hier worden de belangrijkste begrippen en technieken aan de hand van een voorbeeld door een docent uitgelegd. Verder is hier extra oefenmateriaal beschikbaar in de vorm van meerkeuzevragen. Als je alle opgaven in de tekst hebt doorgewerkt, dan maak je de paragraaf met gemengde opgaven. Deze opgaven bieden je de gelegenheid te controleren of je het hoofdstuk als geheel hebt begrepen.

1
Functies van één variabele

Functies worden vaak gebruikt om verbanden tussen (economische) variabelen te beschrijven. In dit hoofdstuk introduceren we het begrip functie van één variabele en geven we een overzicht van de klasse van polynoomfuncties, machtfuncties, exponentiële en logaritmische functies. Bovendien komt een aantal algebraïsche basisvaardigheden aan bod, zoals het oplossen van vergelijkingen en ongelijkheden.

Lijst van begrippen

- Functie van één variabele
- Nulpunt van een functie
- Snijpunt van grafieken van functies
- Lineaire functie
- Kwadratische functie
- Polynoomfunctie
- Machtfunctie
- Exponentiële functie
- Logaritmische functie

1.1 Introductie van functies van één variabele

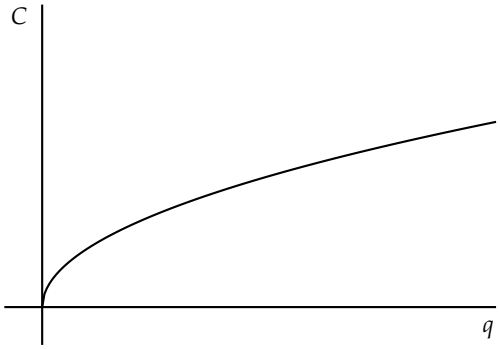
Voor het beschrijven van een verband tussen variabelen kunnen we gebruikmaken van het wiskundige begrip functie. In deze paragraaf introduceren we functies van één variabele.

We starten met een voorbeeld waarin we laten zien hoe we een functie kunnen gebruiken om het verband te beschrijven tussen de kosten en de hoeveelheid die geproduceerd wordt van een bepaald goed.

Voorbeeld 1.1: kostenfunctie

Een manager heeft onderzoek verricht om de kosten in kaart te kunnen brengen van een productieproces. Het resultaat van dit onderzoek is een verband tussen het productieniveau q en de bijbehorende kosten C, dat hij grafisch kan weergeven in een

assenstelsel (zie figuur 1.1). In dit assenstelsel geeft de horizontale as het productieniveau weer en de verticale as de bijbehorende kosten. Ofwel, de onafhankelijke variabele (het productieniveau) staat op de horizontale as en de afhankelijke variabele (de kosten) staat op de verticale as.



Figuur 1.1 De kostenfunctie van een productieproces.

Een grafisch verband tussen het productieniveau en de kosten is veelal niet toereikend. Een manager wil voor elk productieniveau q de bijbehorende kosten $C(q)$ exact weten. Dan is het handiger als het verband tussen het productieniveau en de kosten beschreven wordt door een functie: dat is een rekenvoorschrift dat voor elk toegelaten productieniveau q de kosten C berekent. Het rekenvoorschrift dat past bij de grafiek van figuur 1.1 is $\sqrt{q}$. Dit rekenvoorschrift geeft aan dat als het productieniveau q de waarde 9 heeft, de kosten $\sqrt{9} = 3$ zijn, dat als het productieniveau q de waarde 16 heeft, de kosten $\sqrt{16} = 4$ zijn, enzovoorts.

Steeds worden dus de kosten verkregen door het *rekenvoorschrift* $\sqrt{q}$ toe te passen op een waarde van het productieniveau q. Omdat we aan negatieve waarden van het productieniveau geen betekenis toekennen, beperken we de werking van het rekenvoorschrift tot de waarden van q groter of gelijk aan 0. We kunnen concluderen dat de variabelen C en q voldoen aan de vergelijking $C = \sqrt{q}$. We zeggen dat 'de kosten C een functie is van het productieniveau q'.

Als de kosten C een functie is van het productieniveau q en we laten in het midden hoe het rekenvoorschrift eruitziet, dan noteren we het rekenvoorschrift als $C(q)$. Het verband tussen C en q wordt dan gegeven door de vergelijking $C = C(q)$. In het bovenstaande voorbeeld staat $C(q)$ dus voor $\sqrt{q}$.

Functies van één variabele

Een *functie van een variabele* x is een rekenvoorschrift $y(x)$ waarmee voor iedere toegelaten waarde van de variabele x precies één getal, de functiewaarde, wordt berekend.
De verzameling van alle toegelaten waarden D van x wordt aangeduid als het *definitiegebied* of het *domein* van de functie.
De verzameling van alle mogelijke functiewaarden wordt aangeduid als het *bereik* van de functie.

Als het definitiegebied D niet gegeven is bij een functie, dan bestaat het definitiegebied uit alle x waarvoor het functievoorschrift $y(x)$ uitvoerbaar is. Als er extra restricties worden opgelegd, dan wordt dit expliciet aangegeven. Een dergelijke restrictie, zoals niet-negativiteit van x, kan bijvoorbeeld voortkomen uit de economische interpretatie van het model.

De functiewaarden $y(x)$ kunnen we opvatten als de waarden van een variabele. Als we die variabele y noemen, dan voldoen y en x aan de vergelijking

$$y = y(x).$$

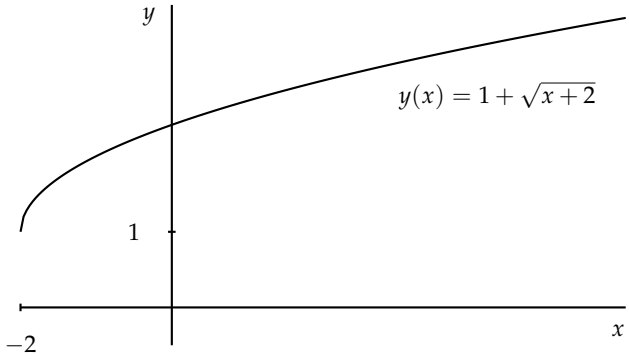
De variabele x in $y(x)$ wordt de *onafhankelijke*, *verklarende* of *inputvariabele* genoemd en de variabele y de *afhankelijke*, *te verklaren* of *outputvariabele*.

Functies en variabelen worden aangeduid met letters of combinaties van letters. Misschien ben je gewend variabelen aan te geven met de letters x, y of z en een functie met de letter f (dus $f(x)$ in plaats van $y(x)$, zodat $y = f(x)$). Maar in de economische theorie kiest men vaak voor een letter of een combinatie van letters die dicht aanligt tegen de betekenis van de variabele (p voor **p**rijs, L (van het Engelse '**L**abour') voor arbeid, K (van het Duitse '**K**apital') voor kapitaal, w (van het Engelse '**w**age') voor loon, enzovoort) of van het functievoorschrift (MC (van het Engelse '**M**arginal **C**ost') voor marginale kostenfunctie, AC (van het Engelse '**A**verage **C**ost') voor gemiddelde kostenfunctie, enzovoort).

De *grafiek* van een functie $y(x)$ is een figuur in een assenstelsel met twee assen, de x-as en de y-as, die is opgebouwd uit de punten met de coördinaten $(x, y(x))$. Het is gebruikelijk de onafhankelijke variabele x op de horizontale as uit te zetten en de afhankelijke variabele y op de verticale as.

Voorbeeld 1.2: grafiek van een functie

In figuur 1.2 is de grafiek getekend van de functie $y(x) = 1 + \sqrt{x+2}$. Het definitiegebied van $y(x)$ bestaat uit $x \geq -2$ en het bereik uit $y \geq 1$. In intervalnotatie is het domein $[-2, \infty)$ en het bereik $[1, \infty)$.



Figuur 1.2 De grafiek van de functie $y(x) = 1 + \sqrt{x+2}$ in een (x, y)-assenstelsel.

Een snijpunt van de grafiek van de functie $y(x)$ met de x-as kan bepaald worden door het berekenen van een nulpunt van de functie $y(x)$.

Nulpunt van een functie van één variabele

Een *nulpunt* van een functie $y(x)$ is een oplossing van de vergelijking $y(x) = 0$.

Een nulpunt a van de functie $y(x)$ geeft een snijpunt $(a, 0)$ van de bijbehorende grafiek met de x-as.

Snijpunt van twee grafieken

Een snijpunt van de grafiek van een functie $y(x)$ met de grafiek van een andere functie $z(x)$ is een punt (a, b) waarvoor a een oplossing is van de vergelijking $y(x) = z(x)$ en $b = y(a)(= z(a))$.

Voor het bepalen van een snijpunt van de grafieken van de functies $y(x)$ en $z(x)$ wordt eerst de x-coördinaat van het snijpunt bepaald door de vergelijking

$$y(x) = z(x)$$

op te lossen. Vervolgens wordt de y-coördinaat gevonden door de gevonden x-coördinaat in te vullen in één van de twee functies.

Een snijpunt van de grafiek van functie $y(x)$ met de y-as wordt gevonden door de functiewaarde in $x = 0$ uit te rekenen. Dus een snijpunt met de y-as wordt gegeven door $(0, y(0))$.

Voorbeeld 1.3: nul- en snijpunten

Beschouw de functies $y(x) = -2x + 2$ en $z(x) = x - 4$. Het nulpunt van $y(x)$ is de oplossing van $y(x) = 0$,

$$\begin{aligned} y(x) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad -2x + 2 = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad -2x = -2 \\ &\Leftrightarrow \quad x = 1. \end{aligned}$$

Het punt $(1, 0)$ is dus het snijpunt van de grafiek van $y(x)$ met de x-as. Een snijpunt van de grafiek van $y(x)$ met de grafiek van $z(x)$ volgt uit een oplossing van de vergelijking $y(x) = z(x)$,

$$\begin{aligned} y(x) = z(x) \quad &\Leftrightarrow \quad -2x + 2 = x - 4 \\ &\Leftrightarrow \quad -3x = -6 \\ &\Leftrightarrow \quad x = 2. \end{aligned}$$

De x-coördinaat van het snijpunt is dus $x = 2$. Door $x = 2$ in te vullen in de functie $y(x)$ vinden we dat de y-coördinaat gelijk is aan $y(2) = -2$. Merk op dat uiteraard ook $z(2) = -2$. Het snijpunt wordt dus gegeven door $(2, -2)$. Omdat $y(0) = 2$, snijdt de grafiek van $y(x)$ de y-as in het punt $(0, 2)$.

In de volgende paragrafen van dit hoofdstuk bekijken we enkele elementaire functies van één variabele, tekenen we de bijbehorende grafieken, geven we enkele eigenschappen en berekenen we nulpunten en snijpunten.

1.2 Overzicht van functies van één variabele

1.2.1 Polynoomfuncties

In deze paragraaf beginnen we met een overzicht van constante, lineaire en kwadratische functies. Vervolgens geven we de algemene vorm van een polynoomfunctie. Tijdens dit overzicht komen ook het oplossen van vergelijkingen en ongelijkheden aan bod.

Constante functies

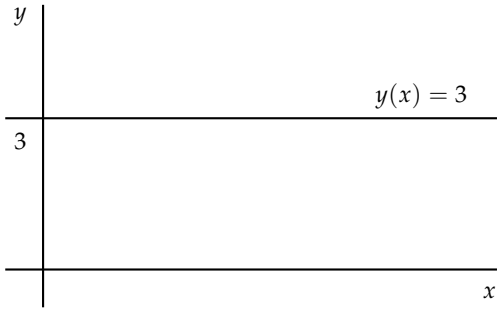
Een functie van de vorm

$$y(x) = c,$$

waarbij c een getal is, wordt een *constante functie* genoemd. Een constante functie heeft dus voor elke x dezelfde functiewaarde. Daarom is de grafiek van een constante functie een horizontale lijn.

Voorbeeld 1.4: grafiek van een constante functie

De functie $y(x) = 3$ is een voorbeeld van een constante functie en is getekend in figuur 1.3.



Figuur 1.3 De grafiek van de constante functie $y(x) = 3$.

Merk op dat een constante functie $y(x) = c$ geen nulpunt heeft als $c \neq 0$ en dat iedere x een nulpunt is als $c = 0$.

Lineaire functies

Een functie van de vorm

$$y(x) = ax + b,$$

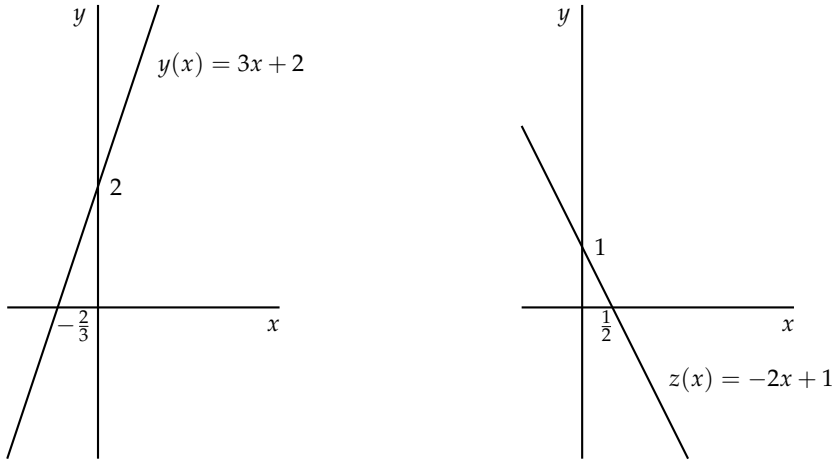
waarbij a en b getallen zijn ($a \neq 0$), wordt een *lineaire functie* genoemd. Merk op dat wanneer $a = 0$ de functie $y(x)$ een constante functie is. De *helling* van de lijn, ook wel *richtingscoëfficiënt* genoemd, wordt gegeven door het getal a. Bij een lineaire functie geeft de richtingscoëfficiënt aan hoeveel de functiewaarde verandert wanneer een input x met één eenheid toeneemt. Omdat bij een lineaire functie deze verandering dus altijd gelijk is aan a, geldt voor elke x

$$y(x+1) - y(x) = a.$$

Een lineaire functie heeft een positieve helling als $a > 0$ en een negatieve helling als $a < 0$. Merk op dat een constante functie een helling heeft gelijk aan 0.

Voorbeeld 1.5: grafiek van een lineaire functie

De grafieken van de lineaire functies $y(x) = 3x + 2$ en $z(x) = -2x + 1$ zijn getekend in figuur 1.4 in een $(x, y)-$assenstelsel. De helling van de grafiek van $y(x)$ is gelijk aan 3 en de helling van de grafiek van $z(x)$ is gelijk aan -2.



Figuur 1.4 *De grafiek van de functie $y(x) = 3x + 2$ (links).*
De grafiek van de functie $z(x) = -2x + 1$ (rechts).

In het laatste voorbeeld van paragraaf 1.1 hebben we nulpunten en snijpunten uitgerekend voor lineaire functies. Voor lineaire functies is het eenvoudig een algemene formule af te leiden voor het snijpunt met de x-as en de y-as. Om het snijpunt van de grafiek van een lineaire functie $y(x) = ax + b$ met de x-as te bepalen, berekenen we het nulpunt van de functie $y(x)$,

$$\begin{aligned} y(x) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad ax + b = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad ax = -b \\ &\Leftrightarrow \quad x = -\frac{b}{a}. \end{aligned}$$

Omdat een lineaire functie $y(x) = ax + b$ slechts één nulpunt heeft, heeft de grafiek ook maar één snijpunt met de x-as. Dus het snijpunt van de grafiek van een lineaire functie met de x-as is $(-\frac{b}{a}, 0)$. Het snijpunt met de y-as wordt gevonden door $x = 0$ in het functievoorschrift in te vullen: $y(0) = b$. Dus het snijpunt met de y-as is $(0, b)$. Voor een een lineaire functie $y(x) = ax + b$ kunnen we dus concluderen dat a de helling van de lijn weergeeft, het nulpunt gelijk is aan $-\frac{b}{a}$ en b de y-coördinaat van het snijpunt van de grafiek met de y-as is.

Opgave 1.1 (nul- en snijpunt)

Beschouw de functies $y(x) = 3x + 2$ en $z(x) = -5x + 4$.

a) Teken de grafieken van $y(x)$ en $z(x)$.
b) Bepaal de nulpunten van elk van deze functies.
c) Bepaal voor de grafiek van elk van deze functies het snijpunt met de x-as.
d) Bepaal voor de grafiek van elk van deze functies het snijpunt met de y-as.
e) Bepaal het snijpunt van de grafieken van deze functies.

Opgave 1.2 (helling van een lijn)

De grafiek van een lineaire functie $y(x) = ax + b$ gaat door de punten $(2, 4)$ en $(3, 9)$. Bepaal a en b.

Kwadratische functies

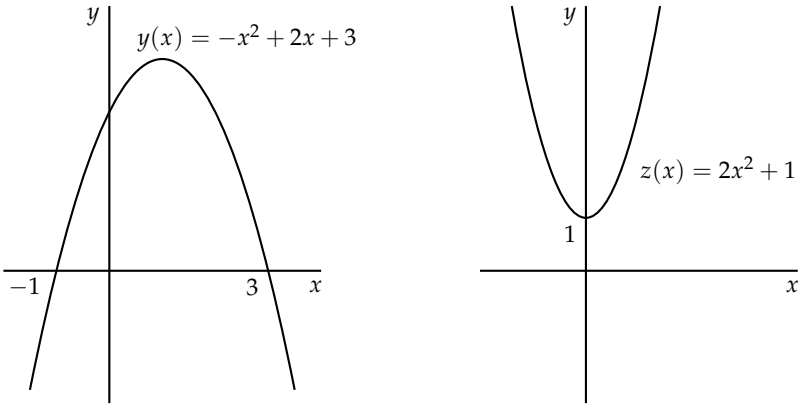
Een functie van de vorm

$$y(x) = ax^2 + bx + c,$$

waarbij a, b en c getallen zijn ($a \neq 0$) wordt een *kwadratische functie* genoemd. Merk op dat voor $a = 0$ de functie of lineair (als $b \neq 0$) of constant (als $b = 0$) is. De grafiek van een functie van de vorm $y(x) = ax^2 + bx + c$ is een parabool. Dit is een dalparabool als $a > 0$ en een bergparabool als $a < 0$.

Voorbeeld 1.6: grafieken van kwadratische functies

De grafieken van de kwadratische functies $y(x) = -x^2 + 2x + 3$ en $z(x) = 2x^2 + 1$ zijn getekend in figuur 1.5. De grafiek van de functie $y(x)$ is een bergparabool omdat de coëfficiënt voor x^2 gelijk is aan -1 (negatief), en de grafiek van $z(x)$ is een dalparabool omdat de coëfficient voor x^2 gelijk is aan 2 (positief).



Figuur 1.5 De grafiek van de functie $y(x) = -x^2 + 2x + 3$ is een bergparabool (links). De grafiek van de functie $z(x) = 2x^2 + 1$ is een dalparabool (rechts).

De snijpunten van de grafiek met de x-as van een kwadratische functie $y(x) = ax^2 + bx + c$ worden bepaald door het oplossen van de kwadratische vergelijking

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

Een kwadratische vergelijking kunnen we oplossen door gebruik te maken van de '*abc-formule*'. Hierin speelt de *discriminant* een belangrijke rol. De discrimant van de kwadratische vergelijking $ax^2 + bx + c = 0$ is gelijk aan $b^2 - 4ac$ en wordt genoteerd met D,

$$D = b^2 - 4ac.$$

Een kwadratische vergelijking heeft twee, één of nul oplossingen, afhankelijk van de waarde van de discriminant. De oplossingen van een kwadratische vergelijking worden weergegeven in het volgende discriminantencriterium.

Discriminantencriterum en abc-formule voor een kwadratische vergelijking

Voor een kwadratische vergelijking $ax^2 + bx + c = 0$ met $a \neq 0$ geldt voor $D = b^2 - 4ac$ het volgende:

(i) als $D > 0$, dan zijn de oplossingen van de kwadratische vergelijking

$$x = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{en} \quad x = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

(ii) als $D = 0$, dan is de oplossing van de kwadratische vergelijking

$$x = -\frac{b}{2a}.$$

(iii) als $D < 0$, dan heeft de kwadratische vergelijking geen oplossingen.

Voorbeeld 1.7: nulpunten van een kwadratische functie

Beschouw de functie $y(x) = -x^2 + 2x + 3$. Een nulpunt van $y(x)$ is een oplossing van de vergelijking

$$-x^2 + 2x + 3 = 0.$$

De discriminant $D = 2^2 - 4 \cdot -1 \cdot 3 = 16$. Omdat $D > 0$ krijgen we volgens de abc-formule de volgende twee oplossingen:

$$x = \frac{-2 + \sqrt{2^2 - 4 \cdot -1 \cdot 3}}{2 \cdot -1} = -1 \quad \text{en} \quad x = \frac{-2 - \sqrt{2^2 - 4 \cdot -1 \cdot 3}}{2 \cdot -1} = 3.$$

De snijpunten van de grafiek met de x-as zijn $(-1, 0)$ and $(3, 0)$, zoals ook te zien is in figuur 1.5.

Opgave 1.3 (nulpunten van een kwadratische functie)

Bepaal de nulpunten van ieder van de volgende kwadratische functies:

a) $y(x) = x^2 + 7x + 6$.

b) $y(x) = 4x^2 + 2x + 1$.

Opgave 1.4 (grafiek van een kwadratische functie)

Beschouw de twee functies $y(x) = x^2 + 4x + 3$ en $z(x) = -x^2 + 6$.

a) Teken de grafiek van de functies $y(x)$ en $z(x)$.

b) Bereken de snijpunten van de grafieken van deze functies.

Wanneer we twee functies beschouwen zijn niet alleen de snijpunten interessant, maar ook de waarden van x waarvoor de functiewaarde van één functie groter of kleiner is dan

de functiewaarde van de andere functie. Om dit soort vraagstukken op te lossen moeten we ongelijkheden oplossen. Voor het oplossen van de ongelijkheid $f(x) \geq g(x)$ gebruiken we het volgende stappenplan.

Oplossen ongelijkheid $f(x) \geq g(x)$

Stap 1.	Definieer de functie $h(x) = f(x) - g(x)$.
Stap 2.	Bepaal de nulpunten van $h(x)$.
Stap 3.	Maak een tekenoverzicht van $h(x)$.
Stap 4.	Lees in het tekenoverzicht af waar $h(x) \geq 0$.
Conclusie:	De waarden waarvoor $h(x) \geq 0$ zijn dezelfde als waarvoor $f(x) \geq g(x)$.

Het spreekt vanzelf dat op soortgelijke wijze de ongelijkheden $f(x) > g(x), f(x) \leq g(x)$ en $f(x) < g(x)$ opgelost kunnen worden. In het volgende voorbeeld illustreren we het stappenplan voor het oplossen van een ongelijkheid.

Voorbeeld 1.8: ongelijkheden oplossen

Beschouw de functies $f(x) = x^2 + 2$ en $g(x) = -3x$. We willen alle waarden van x bepalen waarvoor $f(x) \geq g(x)$.

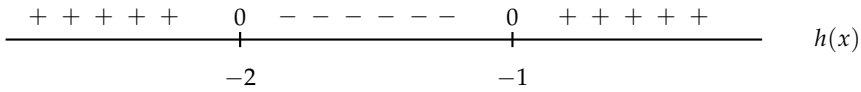
Stap 1. Definieer de functie $h(x) = f(x) - g(x)$.
We krijgen $h(x) = f(x) - g(x) = x^2 + 2 - (-3x) = x^2 + 3x + 2$.

Stap 2. Bepaal de nulpunten van $h(x)$.

$$\begin{aligned} h(x) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad x^2 + 3x + 2 = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad x = -1 \text{ of } x = -2, \end{aligned}$$

waarbij de oplossingen zijn gevonden door gebruik te maken van de *abc*-formule.

Stap 3. Maak een tekenoverzicht van $h(x)$.
Het tekenoverzicht van $h(x)$ wordt verkregen door de nulpunten op een rechte lijn te zetten. Dit verdeelt de lijn in drie intervallen: $(-\infty, -2), (-2, -1)$ en $(-1, \infty)$. De functiewaarden van $h(x)$ in één interval hebben allemaal hetzelfde teken. Dit betekent dat alle functiewaarden allemaal positief of allemaal negatief zijn in het betreffende interval. Dus, door een willekeurige waarde te kiezen in $(-\infty, -2)$ kunnen we het teken bepalen van $h(x)$ op dit interval. Kies bijvoorbeeld $x = -3$. Dan is $h(-3) = (-3)^2 + 3 \cdot (-3) + 2 = 2 > 0$. Dus we kunnen concluderen dat $h(x) > 0$ voor alle x in het interval $(-\infty, -2)$. Omdat $h(-1.5) = -0.25$ is $h(x) < 0$ voor alle x in het interval $(-2, -1)$. Zo vinden we ook dat $h(x) > 0$ voor alle x in het interval $(-1, \infty)$ omdat $h(0) = 2$. Figuur 1.6 geeft het tekenoverzicht van $h(x)$.



Figuur 1.6 Tekenoverzicht van $h(x)$.

Stap 4. Lees in het tekenoverzicht af waar $h(x) \geq 0$.
Uit het tekenoverzicht volgt dat $h(x) \geq 0$ als $x \leq -2$ of $x \geq -1$. Dus $f(x) \geq g(x)$ als $x \leq -2$ of $x \geq -1$.

Opgave 1.5 (ongelijkheden oplossen)

a) Beschouw de functies $f(x) = 2x + 4$ en $g(x) = 2x^2 + 3x + 4$. Bepaal alle waarden van x waarvoor $f(x) \geq g(x)$.
b) Beschouw de functies $f(x) = x^2 + 4x + 3$ en $g(x) = -x^2 + 6$. Bepaal alle waarden van x waarvoor $f(x) \geq g(x)$ (zie opgave 1.4).
c) Beschouw de functies $f(x) = x^2$ en $g(x) = 5x - 4$. Bepaal alle waarden van x waarvoor $f(x) < g(x)$.

Opgave 1.6 (snijpunten van de grafiek van een kwadratische functie met de x-as)

Bepaal voor ieder van de volgende functies de waarde van p waarvoor de kwadratische functie twee snijpunten heeft met de x-as:

a) $y(x) = x^2 + px + 3$.
b) $y(x) = p^2x^2 + 2px + 1$.

Polynoomfuncties

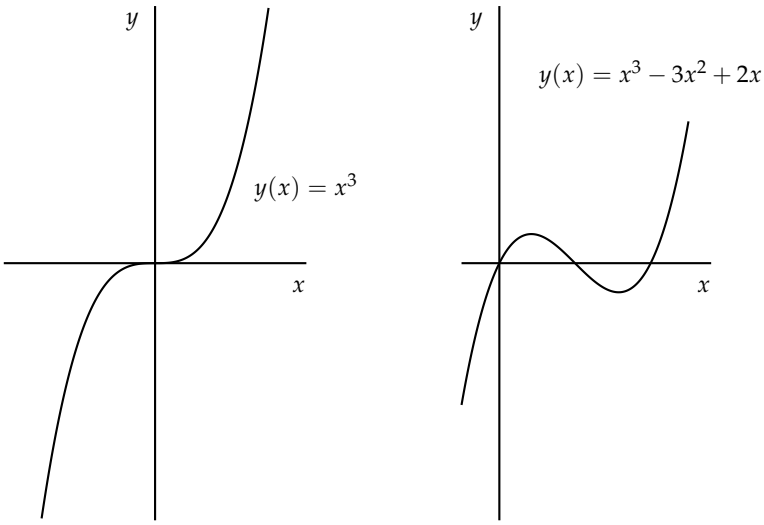
Een functie van de vorm

$$y(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + ... + a_1 x + a_0$$

waarbij $a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, ..., a_1, a_0$ getallen zijn ($a_n \neq 0$) en n een niet-negatief geheel getal, wordt een polynoomfuntie genoemd. De graad van een polynoomfunctie is gelijk aan n, ofwel de hoogste macht in de polynoomfunctie. Constante, lineaire en kwadratische functies zijn voorbeelden van polynoomfuncties met graad respectievelijk 0, 1 en 2.

Voorbeeld 1.9: derdegraads polynoom en nulpunten

De functies $y(x) = x^3$ en $z(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$ zijn voorbeelden van derdegraads polynomen. De grafieken van beide functies zijn weergegeven in figuur 1.7 in een $(x, y)-$assenstelsel.



Figuur 1.7 *De grafiek van de functie $y(x) = x^3$ (links).*
De grafiek van de functie $z(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$ (rechts).

Het is duidelijk dat $y(x)$ precies één nulpunt heeft, namelijk $x = 0$. De nulpunten van $z(x)$ kunnen als volgt berekent worden:

$$\begin{aligned} z(x) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad x^3 - 3x^2 + 2x = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad x(x^2 - 3x + 2) = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad x = 0 \text{ of } x^2 - 3x + 2 = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad x = 0, x = 1 \text{ of } x = 2, \end{aligned}$$

waarbij $x^2 - 3x + 2 = 0$ is opgelost door gebruik te maken van de *abc*-formule. ◀

Opgave 1.7 (nulpunten van een polynoomfunctie)
Bereken de nulpunten van de volgende polynoomfuncties:

a) $x^3 - 2x^2 + x = 0.$
b) $x^4 - x^2 + x(x^2 - 1) = 0.$
c) $3x^4 - 7x^2 + 2 = 0.$

1.2.2 Machtfuncties

Een functie van de vorm

$$y(x) = x^k,$$

met k een niet-negatief geheel getal, wordt een *positief geheeltallige machtfunctie* genoemd. Per definitie geldt dat

$$x^0 = 1,$$

en voor een positief geheel getal k, betekent x^k 'vermenigvuldig x k-maal met zichzelf',

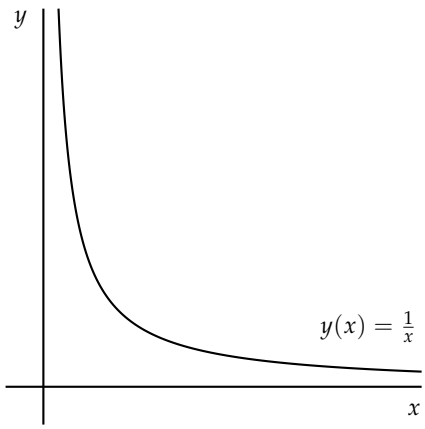
$$x^k = x \cdot x \cdot \ \ldots \ \cdot x \qquad (k\text{-maal}).$$

Gebruikmakend van de positief geheeltallige machtfunctie definiëren we een *negatief geheeltallige machtfunctie* als volgt:

$$y(x) = x^{-k} = \frac{1}{x^k},$$

met k een positief geheel getal. De grafiek van een negatief geheeltallige machtfunctie is een hyperbool. Omdat het niet is toegestaan te delen door nul is de waarde $x = 0$ geen element van het domein van deze functies.

Voorbeeld 1.10: grafiek van een negatief geheeltallige machtfunctie
Een veel gebruikte machtfunctie is $y(x) = x^{-1}$, ofwel, $y(x) = \frac{1}{x}$. In figuur 1.8 is de grafiek getekend van $y(x) = \frac{1}{x}$ voor $x > 0$.



Figuur 1.8 De grafiek van de functie $y(x) = x^{-1}$ $(= \frac{1}{x})$, $(x > 0)$.

Een functie van de vorm

$$y(x) = x^{\frac{m}{n}}, (x \geq 0),$$

waarbij m en n positieve gehele getallen zijn en $\frac{m}{n}$ niet geheeltallig is, wordt een *machtfunctie* genoemd. Een andere wijze om een machtfunctie te schrijven is

$$y(x) = x^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{x^m}.$$

Een functie van de vorm

$$y(x) = x^{-\frac{m}{n}}, (x > 0),$$

waarbij m en n positieve gehele getallen zijn en $\frac{m}{n}$ niet geheeltallig is, wordt een *negatieve machtfunctie* genoemd. Een andere wijze om een negatieve machtfunctie te schrijven is

$$y(x) = x^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{x^m}}.$$

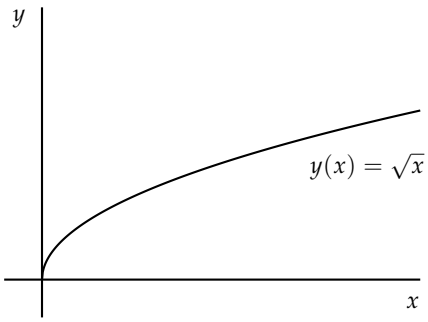
De functies

$$\begin{aligned} y(x) &= x^{\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{x^1} = \sqrt{x}, \\ y(x) &= x^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{x^3}, \\ y(x) &= x^{-\frac{8}{7}} = \frac{1}{\sqrt[7]{x^8}} \end{aligned}$$

zijn voorbeelden van (negatieve) machtfuncties. Als we in het vervolg over een machtfunctie spreken bedoelen we alle typen machtfuncties die hiervoor besproken zijn.

Voorbeeld 1.11: grafiek van de wortelfunctie

Een machtfunctie die veel gebruikt wordt is de wortelfunctie. Dit is de functie $y(x) = x^{\frac{1}{2}}$, ofwel, $y(x) = \sqrt{x}$. De grafiek van de wortelfunctie is weergegeven in figuur 1.9.



Figuur 1.9 De grafiek van de functie $y(x) = x^{\frac{1}{2}} (= \sqrt{x})$.

In het volgende voorbeeld rekenen we het snijpunt uit van de grafiek van de wortelfunctie en een rechte lijn. Hierbij wordt een nieuwe techniek gebruikt.

Voorbeeld 1.12: snijpunt van de wortelfunctie en een rechte lijn

Beschouw de functies $y(x) = \sqrt{x}$ en $z(x) = x - 2$. We berekenen alle mogelijke snijpunten van de grafieken van deze twee functies. We lossen dus allereerst de volgende vergelijking op

$$y(x) = z(x) \Leftrightarrow \sqrt{x} = x - 2.$$

Deze vergelijking lijkt moeilijk op te lossen, maar door beide kanten te kwadrateren krijgen we

$$x = (x-2)^2 \Leftrightarrow x = x^2 - 4x + 4 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 4 = 0.$$

Met de *abc*-formule vinden we dat $x = 4$ of $x = 1$. We moeten echter voorzichtig zijn, want door het kwadrateren zijn er mogelijk oplossingen bijgekomen die in de oorspronkelijke vergelijking geen oplossing waren. Dus we moeten beide oplossingen controleren in de vergelijking

$$\sqrt{x} = x - 2.$$

Voor $x = 4$ krijgen we 2=2, dus kunnen we concluderen dat $x = 4$ een oplossing is. Voor $x = 1$ krijgen we 1=-1, en hier moeten we dus concluderen dat $x = -1$ geen oplossing is. Dus het enige snijpunt van de twee grafieken is $(x, y) = (4, 2)$.

Machtfuncties hebben de volgende eigenschappen.

Eigenschappen van machtfuncties

1) $x^p \cdot x^q = x^{p+q}$
2) $\dfrac{x^p}{x^q} = x^{p-q}$
3) $(x^p)^q = x^{pq}$
4) $x^p \cdot y^p = (x \cdot y)^p$
5) $x^0 = 1$

Voorbeeld 1.13: eigenschappen van machtfuncties

We bepalen p zodanig dat $(\sqrt[3]{x^5})^{-4} = x^p$. Volgens de eigenschappen van machtfuncties krijgen we achtereenvolgens

$$(\sqrt[3]{x^5})^{-4} = (x^{\frac{5}{3}})^{-4} = x^{-\frac{20}{3}}.$$

Het volgt dat $p = -\frac{20}{3} = -6\frac{2}{3}$.

Opgave 1.8 (eigenschappen van machtfuncties)

Bepaal p als de volgende uitdrukkingen vereenvoudigd worden tot 2^p:

a) 8.
b) $8^{\frac{4}{3}}$.
c) $\sqrt{32}$.
d) $64^{-\frac{1}{2}}$.

Opgave 1.9 (eigenschappen van machtfuncties)

Bepaal p en q als de volgende uitdrukkingen vereenvoudigd worden tot $x^p y^q$:

a) $x^2 x^5 y y^2$.
b) $\dfrac{x x^{\frac{1}{3}} y^2}{x^{-\frac{2}{3}} y^{-1}}$.
c) $(x^{-1} y^4)^2$.
d) $x^{\frac{10}{6}} \sqrt[3]{x}$.

Opgave 1.10 (eigenschap van machtfuncties)

Los de volgende vergelijkingen op:

a) $\frac{x^{\frac{1}{8}}\sqrt[4]{x^3}}{x^{\frac{1}{2}}\sqrt[8]{x^7}} = 2.$

b) $\frac{x^2\sqrt{x}}{8x^{\frac{1}{3}}} = \sqrt[3]{x^2}.$

1.2.3 Exponentiële functies

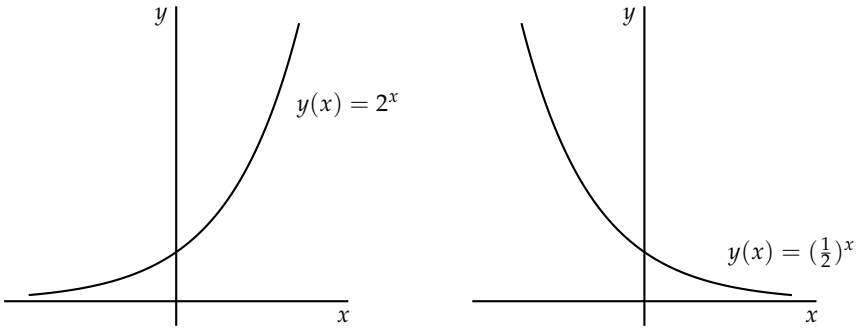
Een functie van de vorm

$$y(x) = a^x,$$

waarbij a ($a \neq 1$) een positief getal is, wordt een *exponentiële functie* met *grondtal* a genoemd. Het grondtal a kun je interpreteren als de groeifactor per periode. In dat geval geeft $y(x)$ de totale vermenigvuldigingsfactor na x perioden. Exponentiële functies waarbij $a > 1$ worden vooral gebruikt in modellen waar toenemende groei een rol speelt.

Voorbeeld 1.14: grafiek van een exponentiële functie

De functie $y(x) = 2^x$ is een voorbeeld van een exponentiële functie. Dat de groei toemend is blijkt uit de snelle toename van de functiewaarden bij een toename van x. Bij een input van bijvoorbeeld $x = 0, x = 1, x = 10$ en $x = 20$ is de functiewaarde achtereenvolgens $y(0) = 2^0 = 1$, $y(1) = 2^1 = 2$, $y(10) = 2^{10} = 1024$ en $y(20) = 2^{20} = 1048576$. De grafiek van de exponentiële functie $z(x) = (\frac{1}{2})^x$ wordt verkregen door de grafiek van $y(x) = 2^x$ te spiegelen in de y-as. De grafieken van beide functies zijn weergeven in figuur 1.10.



Figuur 1.10 De grafiek van de functie $y(x) = 2^x$ (links). De grafiek van de functie $y(x) = (\frac{1}{2})^x$ (rechts).

In het algemeen heeft de grafiek van de exponentiële functie $y(x) = a^x$ voor een grondtal $a > 1$ een soortgelijk verloop als de grafiek van 2^x: hoe groter het grondtal, des te sneller nadert de grafiek de x-as in de negatieve x-richting en des te sneller loopt de grafiek op

in de positieve x-richting. Voor een grondtal $0 < a < 1$ heeft de grafiek van de functie $y(x) = a^x$ een soortgelijk verloop als de grafiek van $y(x) = (\frac{1}{2})^x$. Merk op dat alle grafieken van exponentiële functies boven de x-as liggen. Exponentiële functies hebben dus geen nulpunten.

De exponentiële functie met grondtal e, $y(x) = e^x$, tref je veelvuldig aan in economische groeimodellen. Het getal e (≈ 2.718) wordt het *getal van Euler* genoemd.

Exponentiële functies hebben de volgende eigenschappen.

Eigenschappen van exponentiële functies

1) $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$
2) $\dfrac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$
3) $(a^x)^y = a^{xy}$
4) $a^x \cdot b^x = (ab)^x$
5) $a^0 = 1$

Opgave 1.11 (eigenschap van exponentiële functies)
Toon aan door gebruik te maken van één van de bovenstaande eigenschappen dat ook de volgende eigenschap geldt voor de exponentiële functie:

$$a^{-x} = \frac{1}{a^x}.$$

We gebruiken vaak het volgende kenmerk van exponentiële functies.

Kenmerk van exponentiële functies

$a^x = a^y$ dan en slechts dan als $x = y$

Voorbeeld 1.15: eigenschappen en kenmerk van exponentiële functies
We bepalen de oplossing van de vergelijking

$$3^{-x}9^{2x} = 3.$$

Volgens de eigenschappen van de exponentiële functie herschrijven we de linkerkant als volgt:

$$3^{-x}9^{2x} = 3^{-x}(3^2)^{2x} = 3^{-x}3^{4x} = 3^{3x}.$$

De rechterkant is gelijk aan 3^1. Dus de vergelijking $3^{-x}9^{2x} = 3$ kan herleid worden tot

$$3^{3x} = 3^1.$$

Door gebruik te maken van het kenmerk van de exponentiële functie volgt dat

$$3x = 1.$$

Dus $x = \frac{1}{3}$.

Opgave 1.12 (eigenschappen en kenmerk van de exponentiële functie)

Los de volgende vergelijkingen op:

a) $2^x = 4^{4x+6}$.

b) $27^{2x} = (\frac{1}{3})^{-x+2}$.

c) $(\frac{1}{4})^{x^2-1} = 1$.

Opgave 1.13 (snijpunt van functies)

Beschouw de functies $y_1(x) = 3^{x+2}$ en $y_2(x) = 24 + 3^x$. Bepaal het snijpunt van de grafieken van deze functies.

1.2.4 Logaritmische functies

Voor alle $x > 0$ geldt dat een functie van de vorm

$$y(x) = {}^a\log x,$$

waarbij a ($a \neq 1$) een postief getal is, een *logaritmische functie* met grondtal a wordt genoemd. Het grondtal a kun je net als bij exponentiële functies interpreteren als de groeifactor per periode. Bij een exponentiële functie geeft $y(x)$ dan de totale vermenigvuldigingsfactor aan na x perioden. Bij een logaritmische functie zijn de rollen van x en $y(x)$ omgedraaid. Hier geeft $y(x)$ het aantal perioden aan dat nodig is om tot de totale vermenigvuldigingsfactor x te komen. Een logaritmische functie wordt ook vaak kortweg logaritme genoemd.

Betekenis van de logaritmische functie met grondtal a

$y(x) = {}^a\log x$ betekent: bij x behoort de y waarvoor $a^y = x$.

Voorbeeld 1.16: betekenis logaritme

Voor de logaritmische functie $y(x) = {}^2\log x$ geldt volgens de betekenis van de logaritme:

$$\begin{aligned} {}^2\log 1 &= 0, \text{ omdat } 2^0 = 1; \\ {}^2\log 2 &= 1, \text{ omdat } 2^1 = 2; \\ {}^2\log 8 &= 3, \text{ omdat } 2^3 = 8. \end{aligned}$$

Vanuit de definitie volgt dat de volgende relatie geldt voor de logaritmische en de exponentiële functie.

Relatie tussen logaritmische en exponentiële functies

Een logaritmische en exponentiële functie met hetzelfde grondtal voldoen aan de volgende twee vergelijkingen:
$y = {}^{a}\log a^{y}$ en $x = a^{{}^{a}\log x}$.

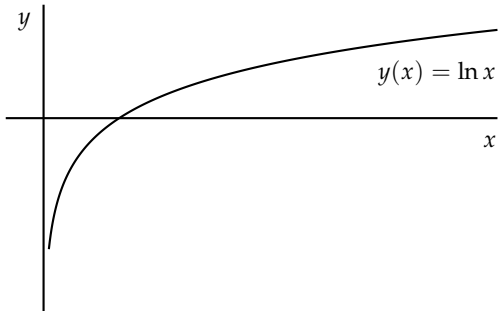
De bovenstaande relatie betekent dat de logaritmische functie $y(x) = {}^{a}\log x$ de inverse functie is van de exponentiële functie $y(x) = a^{x}$. De inverse functie wordt uitgebreid besproken in paragraaf 2.5.

Voorbeeld 1.17: natuurlijke logaritme

De logaritmische functie met grondtal e wordt de *natuurlijke logaritme* genoemd en wordt genoteerd als

$$y(x) = \ln x.$$

De grafiek van de natuurlijke logaritme is weergegeven in figuur 1.11.



Figuur 1.11 De grafiek van de natuurlijke logaritme $y(x) = \ln x$.

Aangezien de natuurlijke logaritme een speciaal geval van een logaritmische functie is, geldt de volgende relatie tussen de natuurlijke logaritme en de exponentiële functie met grondtal e:
(i) $y = \ln e^{y}$,
(ii) $x = e^{\ln x}$, $(x > 0)$.

Bovendien volgt uit de definitie van de logaritme dat

$$\ln e = 1,$$

immers e is het grondtal van de natuurlijke logaritme.

We geven nu vier eigenschappen van de logaritmische functie. Voor het gemak hebben we in de notatie van de logaritme het grondtal weggelaten.

Eigenschappen van logaritmische functies

1) $\log(x \cdot y) = \log x + \log y$
2) $\log\left(\frac{x}{y}\right) = \log x - \log y$
3) $\log x^y = y \log x$
4) $\log 1 = 0$

Opgave 1.14 (eigenschap van logaritmische functies)
Toon aan met behulp van één van de bovenstaande eigenschappen dat de volgende eigenschap geldt voor de logaritmische functie:

$$\log\left(\frac{1}{x}\right) = -\log x.$$

Als een direct gevolg van het kenmerk van de exponentiële functie en de relatie tussen logaritmische en exponentiële functies krijgen we het volgende kenmerk van de logaritmische functie.

Kenmerk van logaritmische functies

${}^a\log x = {}^a\log y$ dan en slechts dan als $x = y$

Voorbeeld 1.18: eigenschappen en kenmerk van logaritmische functies
We lossen de volgende vergelijking op

$$\ln(x+1) - \ln(x+2) = 1.$$

We herschrijven de linkerkant als $\ln(x+1) - \ln(x+2) = \ln(\frac{x+1}{x+2})$. Omdat $\ln e = 1$ wordt een oplossing van de oorspronkelijke vergelijking als volgt gevonden:

$$\begin{aligned} \frac{x+1}{x+2} = e \quad &\Leftrightarrow \quad x+1 = e(x+2) \\ &\Leftrightarrow \quad x+1 = ex+2e \\ &\Leftrightarrow \quad (1-e)x = 2e-1 \\ &\Leftrightarrow \quad x = \frac{2e-1}{1-e}. \end{aligned}$$

Opgave 1.15 (eigenschappen van logaritmische functies)
Herschrijf elk van de volgende uitdrukkingen in één logaritme:

a) $\log x + 2\log y$.

b) $\log x + \log(\frac{1}{y}) - \log z$.

Opgave 1.16 (eigenschap en kenmerk van de logaritmische functie)
Los elk van de volgende vergelijkingen op:

a) $\ln(x+7) + \ln(x+3) = 0$.

b) $({}^{3}\log x)^2 + 6 = 5\,{}^{3}\log x$.

Soms kan het ook handig zijn om het grondtal van een logaritme te veranderen. Dit kan met behulp van de volgende formule.

Grondtal veranderen van logaritmische functies

$${}^{a}\log x = \frac{{}^{b}\log x}{{}^{b}\log a}$$

Voorbeeld 1.19: grondtal veranderen van logaritmische functies
We tonen dat ${}^{100}\log 25 = {}^{10}\log 5$:

$${}^{100}\log 25 = \frac{{}^{10}\log 25}{{}^{10}\log 100} = \frac{2\cdot{}^{10}\log 5}{2\cdot{}^{10}\log 10} = {}^{10}\log 5.$$

Opgave 1.17 (grondtal veranderen van logaritmische functies)
Bepaal alle x waarvoor ${}^{36}\log 81 = {}^{6}\log x$.

1.3 Toepassingen

In deze paragraaf bespreken we twee toepassingen waarin elementaire functies met hun eigenschappen centraal staan.

1.3.1 Break-even

Voordat men in een bedrijf gaat kijken om de winst te maximaliseren van een productieproces is men in eerste instantie geïnteresseerd in het productieniveau waar de winst gelijk is aan nul, ofwel, het productieniveau waar opbrengsten en kosten gelijk zijn. Dit productieniveau wordt ook wel het break-even punt genoemd. Grafisch is het de x-coördinaat van het snijpunt van de grafiek van de opbrengstenfunctie en de grafiek van de kostenfunctie. Het volgende voorbeeld illustreert hoe we het break-even punt kunnen berekenen.

Voorbeeld 1.20: break-even punt

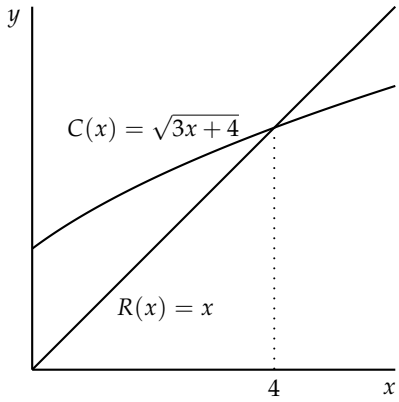
Beschouw de opbrengstenfunctie $R(x) = x$ en de kostenfunctie $C(x) = \sqrt{3x+4}$. Dan is het break-even punt het punt waar $R(x)$ gelijk is aan $C(x)$, ofwel, de x-coördinaat van het snijpunt (x, y) van de grafieken van $R(x)$ en $C(x)$ (zie figuur 1.12). Daarom moeten we de vergelijking $R(x) = C(x)$ oplossen,

$$x = \sqrt{3x+4}.$$

Door te kwadrateren aan beide zijden krijgen we

$$x^2 = 3x + 4 \Leftrightarrow x^2 - 3x - 4 = 0.$$

Het toepassen van de *abc*-formule geeft $x = 4$ of $x = -1$. Merk op dat $x = -1$ geen oplossing is van de vergelijking $R(x) = C(x)$; deze oplossing is het resultaat van het kwadrateren aan beide zijden. Daarom kunnen we concluderen dat $x = 4$ het break-even punt is waar $R(4) = C(4) = 4$.



Figuur 1.12 De grafiek van $R(x) = x$ en $C(x) = \sqrt{3x+4}$.

Opgave 1.18 (break-even punt)

Beschouw de opbrengstenfunctie $R(x) = px$, waarbij $p > 0$ en de kostenfunctie $C(x) = c + vx$, waarbij $c > 0$, $0 < v < p$. Bepaal het break-even punt.

1.3.2 Marktevenwicht

In de micro-economie spelen evenwichten een prominente rol. Het meest klassieke voorbeeld is het marktevenwicht in een vraag-aanbodmodel. Het volgende voorbeeld illustreert hoe een dergelijk evenwicht berekend kan worden.

Voorbeeld 1.21: marktevenwicht

De vraagfunctie naar een goed is gelijk aan $q_d(p) = \frac{1}{p}$, $(p > 0)$ en de aanbodfunctie is $q_s(p) = 2p + 1, (p \geq 0)$. Het marktevenwicht is het snijpunt van de vraag- en aanbodfunctie. In figuur 1.13 zijn beide functies getekend. Let op het feit dat de afhankelijke variabele p verticaal getekend is. Na dit voorbeeld wordt uitgelegd waarom hiervoor gekozen is. Om het marktevenwicht te vinden moeten we de vergelijking $q_d(p) = q_s(p)$ oplossen,

$$\frac{1}{p} = 2p + 1.$$

Door beide kanten met p te vermenigvuldigen krijgen we

$$1 = 2p^2 + p.$$

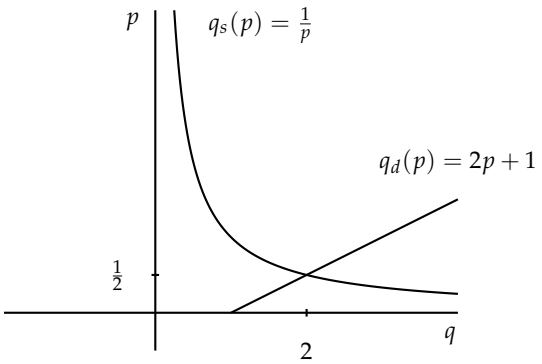
Dit is te herschrijven tot de volgende kwadratische vergelijking

$$2p^2 + p - 1 = 0,$$

waarvan we de volgende nulpunten vinden met behulp van de abc-formule

$$p = \frac{1}{2} \text{ en } p = -1.$$

De negatieve waarde van p is niet toegestaan, dus de evenwichtsprijs is $p = \frac{1}{2}$. De daarbij behorende hoeveelheid is $q_s(\frac{1}{2}) = 2(= q_d(\frac{1}{2}))$. Dus het marktevenwicht is $(q, p) = (2, \frac{1}{2})$.



Figuur 1.13 De grafiek van $q_d(p) = \frac{1}{p}$ en $q_s(p) = 2p + 1$ in een (q, p)-assenstelsel.

Zoals al opgemerkt in het voorbeeld staat voor beide functies de onafhankelijke variabele q op de horizontale as en de afhankelijke variabele p op de verticale as. Dit is afwijkend van de wiskundige conventie zoals is afgesproken voor het tekenen van de grafiek van een functie. De reden is dat de econoom Marshall in het begin van de twintigste eeuw de prijs afzette langs de verticale as van een assenstelsel. Deze conventie wordt nog steeds

in de economie gevolgd, ongeacht of de prijs een afhankelijke of onafhankelijke variabele is.

Opgave 1.19 (marktevenwicht)

De vraagfunctie voor een goed is een lineaire functie. Bij een prijs (p) van 220 is de vraag 180 eenheden (q). Bij een prijs van 160 is de vraag 240.

a) Bepaal de vraagfunctie.

Ook de aanbodfunctie is lineair. Bij een prijs van 150 is het aanbod 100 eenheden en bij een prijs van 250 zal het aanbod 300 eenheden zijn.

b) Bepaal de aanbodfunctie.

c) Teken in een (q, p)-assenstelsel de grafiek van de vraag- en aanbodfunctie.

d) Bepaal het marktevenwicht.

1.4 Gemengde opgaven

Opgave 1.20

Bepaal a zodanig dat de vergelijking $\frac{x}{3} - \frac{a}{x} = 2$ precies één oplossing heeft.

Opgave 1.21

De vraag naar een goed wordt gegeven door $q = 60 - 10p$. De vaste productiekosten van dit goed zijn 25 euro en de variabele kosten zijn 2 euro per eenheid. De totale opbrengst wordt gegeven door $TR(p) = pq$. Bepaal de break-even punten.

Opgave 1.22

Los de ongelijkheid $x^3 + 2x \leq 3x^2$ op.

Opgave 1.23

a) Bepaal de nulpunten van de kwadratische functie $y(x) = 2x^2 + 12x + 18$.

b) Bepaal de waarde van p waarvoor de grafiek van de kwadratische functie $y(x) = -x^2 - x + p$ twee snijpunten heeft met de x-as.

c) Beschouw de functies $y_1(x) = \frac{1}{4}x^2 - 5x + 6$ en $y_2(x) = 3x + p$. Bepaal alle waarden van p waarvoor de grafieken van de twee functies elkaar niet snijden.

Opgave 1.24

Beschouw de functies $y_1(x) = {}^2\log(x-2)$ en $y_2(x) = 2 - {}^2\log(x+4)$.

a) Bepaal alle x zodanig dat $y_1(x) > 3$.

b) Bepaal alle x zodanig dat $y_1(x) < y_2(x)$.

Opgave 1.25

a) Beschouw de functies $f(x) = \frac{2-x}{3+x}$ en $g(x) = -x + 1$. Bepaal alle $x > -3$ zodanig dat $f(x) \geq g(x)$.

b) Beschouw de functies $f(x) = \frac{1-x^2}{3+x}$ en $g(x) = x+1$. Bepaal alle $x > -3$ zodanig dat $f(x) \leq g(x)$.

Opgave 1.26

Bepaal het snijpunt van de grafiek van de functie $y(x) = e^x \ln(x + \frac{1}{2})$ met de x-as.

Opgave 1.27

Beschouw de functies $y_1(x) = \sqrt{2x+3}$ en $y_2(x) = x$.

a) Bereken de snijpunten van de grafieken van deze twee functies.

b) Los de ongelijkheid $y_1(x) < y_2(x)$ op.

Opgave 1.28

Los de volgende (on)gelijkheden op:

a) $8^{2x} \cdot (\frac{1}{4})^{4x^2} = 16 \cdot (\frac{1}{2})^{6x^2}$.

b) $(x^2-1)(x+2) \geq -3(x+1)$.

c) $2 \cdot {}^{3}\log(x) < {}^{9}\log(8x^2) - {}^{9}\log(81x) + 2$.

A
Antwoorden opgaven

A.1 Antwoorden hoofdstuk 1

Opgave 1.1
a) Zie sectie A.7 voor het figuur.
b) $x = -\frac{2}{3}$ voor $y(x)$, $x = \frac{4}{5}$ voor $z(x)$.
c) $(-\frac{2}{3}, 0)$ voor $y(x)$, $(\frac{4}{5}, 0)$ voor $z(x)$.
d) $(0, 2)$ voor $y(x)$, $(0, 4)$ voor $z(x)$.
e) $(x, y) = (\frac{1}{4}, 2\frac{3}{4})$.

Opgave 1.2
$a = 5$, $b = -6$.

Opgave 1.3
a) $x = -6$ en $x = -1$.
b) Er zijn geen nulpunten.

Opgave 1.4
a) Zie sectie A.7 voor het figuur.
b) $(x, y) = (-1 - \frac{1}{2}\sqrt{10}, 2\frac{1}{2} - \sqrt{10})$ en $(x, y) = (-1 + \frac{1}{2}\sqrt{10}, 2\frac{1}{2} + \sqrt{10})$.

Opgave 1.5
a) $-\frac{1}{2} \leq x \leq 0$.
b) $x \leq -1 - \frac{1}{2}\sqrt{10}$ of $x \geq -1 + \frac{1}{2}\sqrt{10}$.
c) $1 < x < 4$.

Opgave 1.6
a) $p < -\sqrt{12}$ of $p > \sqrt{12}$.
b) Een dergelijke p bestaat niet.

Opgave 1.7
a) $x = 0$ en $x = 1$.
b) $x = -1$, $x = 0$ en $x = 1$.
c) $x = -\sqrt{\frac{1}{3}}$, $x = \sqrt{\frac{1}{3}}$, $x = -\sqrt{2}$ en $x = \sqrt{2}$.

Opgave 1.8
a) $p = 3$.
b) $p = 4$.
c) $p = 2\frac{1}{2}$.
d) $p = -3$.

Opgave 1.9
a) $p = 7$, $q = 3$.

b) $p = 2$, $q = 3$.
c) $p = -2$, $q = 8$.
d) $p = 2$, $q = 0$.

Opgave 1.10
a) $x = \frac{1}{4}$.
b) $x = 4$.

Opgave 1.11
-

Opgave 1.12
a) $x = -\frac{12}{7}$.
b) $x = -\frac{2}{5}$.
c) $x = -1$ of $x = 1$.

Opgave 1.13
$(x, y) = (1, 27)$.

Opgave 1.14
-

Opgave 1.15
a) $\log(xy^2)$.
b) $\log(\frac{x}{yz})$.

Opgave 1.16
a) $x = -5 + \sqrt{5}$.
b) $x = 9$ of $x = 27$.

Opgave 1.17
$x = 9$.

Opgave 1.18
$x = \frac{c}{p-v}$.

Opgave 1.19
a) $q_d(p) = -p + 400$, $(0 \leq p \leq 400)$.
b) $q_s(p) = 2p - 200$, $(p \geq 100)$.
c) Zie sectie A.7 voor het figuur.
d) $(q, p) = (200, 200)$.

Opgave 1.20
$a = -3$ of $a = 0$.

Opgave 1.21
$q = 20 - 5\sqrt{6}$ en $q = 20 + 5\sqrt{6}$.

Opgave 1.22
$x \leq 0$ of $1 \leq x \leq 2$.

Opgave 1.23
a) $x = -3$.
b) $p > -\frac{1}{4}$.
c) $p < -58$.

Opgave 1.24
a) $x > 10$.
b) $2 < x < -1 + \sqrt{13}$.

Index

aanbodfunctie, 112, 113
aard van een extremum, 101
abc-formule, 8
absolute verandering, 40
afgeleide, 31
afgeleide inverse functie, 52
afhankelijke variabele, 3, 60
afnemende functie, 98

bereik, 3, 60
bovengrens, 164
break-even, 21
budgetrestrictie, 130
budgetvergelijking, 130
buigpunt, 153

ceteris paribus, 68, 80
Cobb-Douglas functie, 62, 80
concave functie, 152, 155
constante functie, 5, 61
consumentengedrag, 142
consumentensurplus, 177
convexe functie, 152, 155
criteriumfunctie, 122

definitiegebied, 3, 60
dichtheidsfunctie, 179
differentiëren, 33
differentieerregels, 37
differentiequotiënt, 29
directe prijselasticiteit, 81
discriminant, 8
discriminantencriterium, 9
doelfunctie, 130
domein, 3, 60

eerste-orde criterium voor extremum, 102, 118
eerste-orde criterium voor gebonden extremum, 137
eerste-orde voorwaarde van Lagrange, 141
eigenschap afgeleide, 35
eigenschap elasticiteit, 42
eigenschap partiële afgeleide, 77
eigenschap partiële elasticiteit, 80
elasticiteit, 42
elastische vraag, 43
EOQ model, 115
exponentiële functie, 16
extremum, 101, 118

functie van één variabele, 3
functie van twee variabelen, 60

gebonden extremumprobleem, 130
gemiddelde kosten, 110
gemiddelde opbrengsten, 110
gemiddelde verandering, 28
getal van Euler, 17
grafiek, 3, 60
grondtal, 16, 18

helling, 6

indifferentiekromme, 64, 66
inelastische vraag, 43
inkomenseffect, 160
inputvariabele, 3, 60
integraal, 164
integratie-interval, 164
integratievariabele, 164
inverse functie, 49
inverse vraagfunctie, 48
isocostlijn, 64, 145
isoquant, 64, 145

kansverdeling, 179
kettingregel, 45, 83, 85
kettingregel exponentiële functie, 45
kettingregel logaritmische functie, 45
kettingregel machtfunctie, 45
kostenfunctie, 145
kruiselasticiteit, 81
kwadratische functie, 8, 61

Lagrange-functie, 141
Lagrange-multiplicator, 141
lineaire functie, 6, 61
logaritmische functie, 18

machtfunctie, 12
marginale kosten, 39
marginale opbrengsten, 39
marginale outputregel, 110
marginale substitutieverhouding, 90
marginale technische substitutieverhouding, 91
marginaliteit, 39
marktevenwicht, 22
maximum, 101, 117, 131
maximumlocatie, 101, 117, 131
minimaliseringsprobleem producent, 144
minimum, 101, 117, 131
minimumfunctie, 62
minimumlocatie, 101, 117, 131
moderne portefeuilletheorie, 67, 147
monopolie, 112
monotonie, 98
monotoniecriterium extremum, 103, 106

natuurlijke logaritme, 19

niveaukromme, 64
nulpunt, 4
nutsfunctie, 66
nutsmaximalisatie, 130, 143
nutsmaximaliseringsprobleem, 142

onafhankelijke variabele, 3, 60
ondergrens, 164
oneigenlijke integraal, 176
oplossen ongelijkheid, 10
oppervlakte, 168, 174
outputvariabele, 3, 60

partiële afgeleide, 72
partiële elasticiteit, 79
partiële marginaliteit, 78
partieel differentiëren, 72
perfecte complementen, 67
polynoomfunctie, 11, 61
prijsnemer, 110
primitieve, 163, 165
primitiveren, 163
procentuele verandering, 40
producentengedrag, 144
productieregel, 110
productregel voor differentiëren, 37

quotiëntregel voor differentiëren, 37

raaklijn, 31
randextremum, 101, 118, 131
regressielijn, 125
rekenvoorschrift, 2, 59
relatieve verandering, 40
richtingscoëfficiënt, 6, 32, 88
risico, 67

samengestelde functie, 44
scalairproductregel voor differentiëren, 37
scalairproductregel voor integreren, 166
snijpunt, 4
somregel voor differentiëren, 37
somregel voor integreren, 166
stationair punt, 102, 118
substitutie-effect, 160
substitutiemethode, 133

toegelaten punt, 130
toenemende functie, 98
totale effect, 160
tweede-orde afgeleide, 107
tweede-orde criterium voor concaviteit, 152, 156
tweede-orde criterium voor convexiteit, 152, 156
tweede-orde criterium voor extremum, 108, 122
tweede-orde partiële afgeleide, 120

verwachte opbrengst, 67
volledige mededinging, 110
vrij extremum, 101, 118

winstfunctie, 110, 123

zadelpunt, 103, 119

Wiskunde voor bedrijfseconomen is bestemd voor gebruik bij het vak wiskunde in het universitair economisch onderwijs.
Dit boek brengt de economiestudent niet alleen wiskunde bij als basiskennis, maar laat ook toepassingen zien. Onderwerpen als consumentengedrag, voorraadmanagement, optimalisatie portfolioselectie worden vanuit een wiskundig perspectief behandeld.
De introductie van elk wiskundig onderwerp is ondergebracht in aparte paragrafen, waar de uitleg gevolgd wordt door een voorbeeld en een opgave. De paragrafen waar de bedrijfseconomische toepassingen aan bod komen, maken gebruik van de wiskundige methoden en technieken die in de voorafgaande wiskunde paragrafen zijn besproken.
In elke paragraaf staan een groot aantal opgaven om het begrip of de techniek te doorgronden. Bovendien wordt elk hoofdstuk afgesloten met toetsopgaven.
Dit boek is een grondige herziening van de eerdere uitgave *Wiskunde met toepassingen in de micro-economie*. Niet alleen sluit het nieuwe eerste hoofdstuk beter aan op voorkennis van wiskunde op VWO-niveau, er komen ook nieuwe wiskundige onderwerpen en economische toepassingen aan bod.
Dit boek is tevens verkrijgbaar in een Engelstalige versie.

Online ondersteuning
Via de website www.academicservice.nl is ondersteunend materiaal beschikbaar, waaronder:

+ Een e-learning omgeving waarin begrippen en voorbeelden worden uitgelegd met behulp van films. Bovendien bevat deze omgeving een groot aantal meerkeuze-opgaven waarmee getoetst kan worden of de begrippen duidelijk zijn geworden.
+ Antwoorden en uitwerkingen van de opgaven uit het boek.

Over de auteurs
Prof.dr. Herbert Hamers is hoogleraar Speltheorie en Operations Research aan Tilburg University.
Dr. Bob Kaper is in het verleden verbonden geweest als universitair hoofddocent wiskunde aan Tilburg University.
Dr. John Kleppe is wiskundedocent aan Tilburg University.

ISBN 978 90 395 2676 7
NUR 123/163
ACADEMIC SERVICE
9 789039 526767
www.academicservice.nl