



Boom

# MECHANICA

Statisch onbepaalde  
constructies  
en bezwijkanalyse

COENRAAD HARTSUIJKER, HANS WELLEMAN

Derde druk

# Mechanica

Statisch onbepaalde constructies en Bezwijkanalyse

Coenraad Hartsuijker

Hans Welleman

# Boom

Op het gebied van mechanica en sterkteleer zijn bij Boom uitgevers Amsterdam de volgende uitgaven beschikbaar:

- C. Hartsuijker. *Mechanica: Evenwicht*
- C. Hartsuijker. *Mechanica: Spanningen, vervormingen verplaatsingen*
- C. Hartsuijker & J.W. Welleman. *Mechanica: Statisch onbepaalde constructies en Bezwijkanalyse*

Omslagontwerp: Dog & Pony, Amsterdam

Omslaguitvoering: Haagsblauw, Den Haag

Opmaak binnenwerk: Heymans & Vanhove, Gent

Beeld omslag: Viaduct van Millau, Richard Semik, Shutterstock

- © 2004 Hartsuijker & Welleman | Academic Service, 1<sup>e</sup> druk
- © 2013 Hartsuijker & Welleman | Academic Service, 2<sup>e</sup> druk
- © 2016 Hartsuijker & Welleman | Boom uitgevers Amsterdam, 2<sup>e</sup> druk, 2<sup>e</sup> oplage
- © 2021 Hartsuijker & Welleman | Boom uitgevers Amsterdam, 3<sup>e</sup> druk

*Behoudens de in of krachtens de Auteurswet gestelde uitzonderingen mag niets uit deze uitgave worden veeleenvoudigd, opgeslagen in een geautomatiseerd gegevensbestand, of openbaar gemaakt, in enige vorm of op enige wijze, hetzij elektronisch, mechanisch, door fotokopiën, opnamen of enige andere manier, zonder voorafgaande schriftelijke toestemming van de uitgever*

*Voor zover het maken van reprografische veeleenvoudigingen uit deze uitgave is toegestaan op grond van artikel 16h Auteurswet dient men de daarvoor wettelijk verschuldigde vergoedingen te voldoen aan de Stichting Reprorecht (Postbus 3051, 2130 KB Hoofddorp, [www.reprorecht.nl](http://www.reprorecht.nl)). Voor het overnemen van (een) gedeelte(n) uit deze uitgave in bloemlezingen, readers en andere compilatiewerken (art. 16 Auteurswet) kan men zich wenden tot de Stichting PRO (Stichting Publicatie- en Reproductierechten Organisatie, Postbus 3060, 2130 KB Hoofddorp, [www.stichting-pro.nl](http://www.stichting-pro.nl)).*

*No part of this book may be reproduced in any form, by print, photoprint, microfilm or any other means without written permission from the publisher*

ISBN 9789024438105

NUR 956

[www.boomhogeronderwijs.nl](http://www.boomhogeronderwijs.nl)

## Woord vooraf van de uitgever

Dit boek is het derde deel uit een serie leerboeken *Mechanica*, waarin een helder en compleet beeld wordt gegeven van de theorie en toepassingen van de mechanica van constructies in de Bouwkunde en de Civiele Techniek (Weg- en Waterbouwkunde).

De serie bestaat uit drie delen:

- *Mechanica: Evenwicht*
- *Mechanica: Spanningen, vervormingen, verplaatsingen*
- *Mechanica: Statisch onbepaalde constructies en Bezwijkanalyse*

De serie is gebaseerd op de dictaten die ontwikkeld zijn aan de faculteit Civiele Techniek (tegenwoordig Civiele Techniek en Geowetenschappen) van de Technische Universiteit te Delft. De inhoud van deze dictaten is het resultaat van jarenlange ervaring met het mechanicaonderwijs aan de TU Delft en het commentaar van vele collega's in de onderwijssector en generaties studenten. Deze dictaten hebben binnen én buiten de TU Delft een goede reputatie. Bovendien hebben vele docenten mechanica van de jongere generatie het mechanica-cavak tijdens hun opleiding bestudeerd aan de hand van deze dictaten. Mede daardoor worden deze dictaten al aan enkele HTO-opleidingen gebruikt.

Bij de opzet is gezocht naar een fundamentele aanpak zonder daarbij de relatie met de bouwpraktijk te verliezen. Het grote aantal uitgewerkte voorbeelden in de tekst, alsmede de vele vraagstukken aan het einde van ieder hoofdstuk maken van ieder boek een belangrijk hulpmiddel bij het bestuderen en oefenen van het vak Toegepaste Mechanica.

*De uitgever*

## Woord vooraf van de auteurs

In het eerste deel van de serie *Mechanica* wordt onder meer aangegeven hoe men in statische bepaalde staafconstructies de oplegreacties en sneedkrachten kan berekenen uit het *Evenwicht*. Het tweede deel bouwt hierop verder met een onderzoek naar het gedrag van staven en staafconstructies voor wat betreft de *Spanningen, Vervormingen, Verplaatsingen*.

Dit derde deel is opgebouwd uit drie modules waarin drie min of meer op zichzelf staande onderwerpen worden behandeld:

- *Module 1 – Statische onbepaalde constructies*
- *Module 2 – Bezwijkanalyse*
- *Module 3 – Symmetrie*

De behandeling blijft beperkt tot staafconstructies en handberekeningsmethoden.

### *Module 1 – Statisch onbepaalde constructies*

Voor de berekening van de krachtsverdeling in statisch onbepaalde constructies zijn de *evenwichtsbetrekkingen* niet meer toereikend, maar moet ook de vervorming van de constructie in de beschouwing worden betrokken. Deze moet het materiaalgedrag volgen (de *constitutieve betrekkingen*) en moet verder in overeenstemming zijn met de samenhang in de constructie en de bewegingsvrijheid in de opleggingen (de *kinematische betrekkingen*). Bij de berekening van statisch onbepaalde constructies worden de evenwichtsbetrekkingen uit deel 1 gecombineerd met de constitutieve en kinematische betrekkingen uit deel 2.

Afhankelijk van de volgorde waarin de drie genoemde typen betrekkingen in de berekening aan de orde komen kunnen drie verschillende groepen van berekeningsmethoden worden onderscheiden:

- *krachtenmethoden*
- *verplaatsingenmethoden*
- *hybride of gemengde methoden*

De drie methoden worden geïllustreerd aan de hand van voorbeelden. Bij op buiging belaste staafconstructies blijken de zogenaamde *hoekveranderingsvergelijkingen* vaak een aantrekkelijke handberekeningsmethode; voor constructies met niet-verplaatsbare knooppunten (geschoorde constructies) is dit een krachtenmethode en voor constructies met verplaatsbare knopen (ongeschoorde constructies) een hybride methode.

Door slim te werk te gaan is het met de krachtenmethode vaak mogelijk het rekenwerk te vereenvoudigen, wat aantrekkelijk is in het geval van een handberekening. De graad van statisch onbepaaldheid is in de voorbeelden bewust laag gehouden. Het gaat hier om het verwerven van inzicht in het gedrag van statisch onbepaalde constructies.

Voor complexe constructies leent zich de meer de systematische aanpak van de verplaatsingenmethode die bij uitstek geschikt is om te programmeren.

De opzet van de *eindige elementenmethode*, een op computertoepassingen toegesneden verplaatsingenmethode, wordt geïllustreerd aan de hand van een op buiging belasting constructie waarvan de knooppunten alleen maar kunnen roteren.

Anders dan bij statisch bepaalde constructies wordt de krachtsverdeling in statisch onbepaalde constructies beïnvloed door *stijfheidsverschillen*, *zettingen* en *temperatuurinvloeden*. Ook deze onderwerpen komen aan de orde.

Verder is de *stijfheid van de knoopverbindingen* in een statisch onbepaalde constructie van invloed op de krachtsverdeling. Tot nu toe werd altijd gewerkt met oneindig stijve knoopverbindingen. Aan het einde van de module wordt aangegeven hoe men de krachtsverdeling ook kan berekenen voor een constructie met *verende knoopverbindingen*.

## Module 2 – Bezwijkanalyse

In de bezwijkanalyse neemt men aan dat de constructie door voortschrijdende *plastische vervormingen* geleidelijk verandert in een mechanisme waardoor bezwijken optreedt. De belasting waarbij het *bezwijkmechanisme* ontstaat noemt men de *bezwijkbelasting*. Het bereiken van de vloeispanning betekent in de meeste gevallen nog lang niet het bezwijken van de constructie. Dit wordt in eerste instantie geïllustreerd aan de hand van een blok opgehangen aan een aantal (op extensie belaste) draden.

Hierna wordt onderzocht hoe het plastisch gedrag zich manifesteert in een op buiging belaste doorsnede (alle vezels hierin worden op extensie belast). Voor een rechthoekige doorsnede wordt het verband tussen moment en kromming afgeleid, resulterend in een *moment-kromming-diagram*. Verder komen aan de orde het *volplastisch moment* van de doorsnede, de *vormfactor* als een maat voor de reservesterkte (reservecapaciteit) van de doorsnede direct na het bereiken van de vloeispanning, en de *halveringslijn*.

Vervolgens wordt van de doorsnede overgestapt naar de ligger als een verzameling van opeenvolgende doorsneden. Er wordt ingegaan op de ontwikkeling van een *volplastisch scharnier*, het ontstaan van een *bezwijkmechanisme* en de *herverdeling van krachten* in statisch onbepaalde liggers.

Voor het berekenen van de bezwijkbelasting kan men gebruik maken van een *bovengrensbepaling*, een aanpak die bekend staat als de *arbeidsmethode*. Bij deze methode dient men een goed inzicht te hebben in de *kinematica van het bezwijkmechanisme* en de toepassing van het beginsel van *virtuele arbeid*. De werkwijze wordt geïllustreerd aan de hand van een aantal liggers, portalen en raamwerken.

Ten slotte wordt kort ingegaan op de berekening van de bezwijkbelasting met een *ondergrensbepaling*.

*dering*, een aanpak die bekend staat als de *evenwichtsmethode*.

### Module 3 – *Symmetrie*

Bij symmetrische constructies kan men de berekening vaak vereenvoudigen door gebruik te maken van symmetrie-eigenschappen. In deze module worden de verschillende *soorten symmetrie* benoemd en worden ze geïllustreerd aan de hand van een aantal ruimtelijke en vlakke staafconstructies.

Met betrekking tot de belasting wordt het onderscheid ingevoerd tussen een *co-symmetrische belasting* en een *contra-symmetrische belasting*.

Vervolgens wordt ingegaan op de *symmetrie-eigenschappen* van krachtsverdeling en vervormingstoestand in het geval van een symmetrische constructie met symmetrische belasting. De module sluit af met een aantal voorbeelden waarbij voor het berekenen van de constructie gebruik gemaakt wordt van symmetrie-eigenschappen. De voorbeelden blijven beperkt tot in hun vlak belaste vlakke staafconstructies.

De tekst wordt in alle drie de modules ondersteund door een zeer groot aantal figuren en is zo opgeschreven dat studenten zich de lesstof in principe zelfstandig eigen kunnen maken. Het boek zal echter nooit de docent kunnen vervangen. In het onderwijsproces is de docent een onmisbare katalysator. Door de docent kan het proces, gericht op het verwerven van kennis, inzicht en vaardigheid, in belangrijke mate worden versneld. Zo zou de docent aan de hand van de figuren uit het boek het verhaal in grote lijnen kunnen vertellen, waarna de student een en ander nog eens zelf kan nalezen – en dan blijkt dat vaak veel gemakkelijker en sneller te gaan dan men in eerste instantie zou verwachten. Maar ook andere werkwijzen zijn denkbaar.

Ondanks de hiervoor beschreven en welbewust gekozen opbouw van het boek zijn er voldoende mogelijkheden om zonder problemen bepaalde delen over te slaan als het onderwijsprogramma daar om vraagt of als de docent dat wenselijk acht. Daarnaast biedt het grote aantal vraagstukken de docent de gelegenheid een eigen aanvullende onderwijsstrategie te ontwikkelen.

Onder de vraagstukken bevinden zich kleine opgaven die zich bij uitstek lenen voor oefening in groepsverband, tijdens de les. De grotere vraagstukken, meestal opgesplitst in deelvragen, zijn eerder bedoeld als opdrachten die individueel of in kleine groepjes moeten worden uitgevoerd. Samenwerking tussen de studenten dient daarbij te worden aangemoedigd: het aan elkaar vertellen wat je *niet* begrijpt is net zo leerzaam als het aan elkaar vertellen wat je *wel* begrijpt. Bovendien wordt de student zo uitgedaagd zelf te ontdekken dat er vaak meerdere wegen kunnen zijn die tot het gevraagde resultaat leiden.

Een beter inzicht en grotere vaardigheid zijn alleen te bereiken door veel en regelmatig te oefenen. Voor een goede afstemming en dosering is ook hier weer de hand van de meester nodig: de docent.

Onze dank gaat uit naar Prof. ir. D. Dicke voor het beschikbaar stellen van een vraagstukkenverzameling waar wij vrijmoedig gebruik van hebben gemaakt, en naar onze collega's ir. Charles Vrijman en dr. ir. Harm Askes.

Nootdorp / herfst 2004  
Den Hoorn

C. Hartsuijker  
J.W. Welleman

## **Woord vooraf van de auteur bij de 2<sup>e</sup> en 3<sup>e</sup> druk**

Op verzoek van de uitgever is het oblong formaat ingewisseld voor een handzaam staand formaat, waarbij er opnieuw naar is gestreefd tekst en bijbehorende figuren op twee naast elkaar gelegen pagina's te houden.  
Bij de derde druk is daarnaast ook kleur toegevoegd.

*Nootdorp/ januari 2016  
najaar 2020*

*C. Hartsuijker*

# Inhoud

## Module 1 - Statisch onbepaalde constructies

- 1 Inleiding 1**
- 2 Krachtenmethode 7**
  - 2.1 Opzet van de berekening 7
  - 2.2 Voorbeelden van de krachtenmethode 8
  - 2.3 Vraagstukken 43
- 3 Hoekveranderingsvergelijkingen 55**
  - 3.1 Hoekveranderingsvergelijkingen voor constructies met niet-verplaatsbare knooppunten 57
  - 3.2 Kinematica van een mechanisme en virtuele arbeid 74
  - 3.3 Hoekveranderingsvergelijkingen voor constructies met verplaatsbare knooppunten 83
  - 3.4 Vraagstukken 101
- 4 Verplaatsingenmethode 117**
  - 4.1 Opzet van de berekening 117
  - 4.2 De differentiaalvergelijking 118
  - 4.3 Voorbeelden van de verplaatsingenmethode 120
  - 4.4 Berekening van een paalfundering 131
  - 4.5 Vraagstukken 140
- 5 Eindige-elementenmethode 153**
  - 5.1 Notaties en tekenafspraken 154
  - 5.2 Opzet van de berekening 156
  - 5.3 Elementstijfheidsmatrix 158
  - 5.4 Systeemstijfheidsmatrix 161
  - 5.5 Oplossingsfase 165
  - 5.6 Voorgescreven verplaatsingen 171
  - 5.7 Elementbelastingen 177
  - 5.8 Vraagstukken 185

## 6 Steunpuntszettingen en temperatuurinvloeden 191

- 6.1 Steunpuntszettingen 192
- 6.2 Temperatuurinvloeden 202
- 6.3 Vraagstukken 218
- 7 Invloed van stijfheidsverschillen 229**
  - 7.1 Stijfheidsverschillen binnen een staaf 231
  - 7.2 Stijfheidsverschillen tussen staven 237

## 8 Verende verbindingen 247

- 8.1 De hoekveranderingsvergelijking in een verende verbinding 247
- 8.2 Statisch bepaalde constructies 249
- 8.3 Statisch onbepaalde constructies 254

## Module 2 - Bezwijkanalyse

### 1 Inleiding 261

- 1.1 Materiaalgedrag 261
- 1.2 Beoordeling constructiegedrag 262
- 1.3 Bezwijkanalyse 262
- 1.4 Toepasbaarheid 263

### 2 Elastisch of plastisch rekenen – blok opgehangen aan draden 265

- 2.1 Blok opgehangen aan draden; algemene gegevens 265
- 2.2 Blok opgehangen aan twee draden 266
- 2.3 Blok opgehangen aan drie draden 267
- 2.4 Een veilige ophanging 270
- 2.5 Voorlopige conclusies 271
- 2.6 Vraagstukken 272



<b>3</b>	<b>Elasto-plastisch gedrag van een op buiging belaste doorsnede</b>	<b>275</b>	<b>7</b>	<b>De evenwichtsmethode – een ondergrensbenadering</b>	<b>365</b>
3.1	Betrekking tussen buigend moment en kromming	275	7.1	Spelen met momentenlijnen	366
3.2	Berekening vormfactor	282	7.2	Vraagstukken	371
3.3	Halveringslijn	290		<b>Module 3 - Symmetrie</b>	
3.4	Vraagstukken	294	<b>1</b>	<b>Inleiding</b>	<b>375</b>
<b>4</b>	<b>Elasto-plastisch gedrag van een ligger</b>	<b>297</b>	<b>2</b>	<b>Symmetrische constructies</b>	<b>377</b>
4.1	Ontwikkeling van een volplastisch scharnier	297	<b>3</b>	<b>Symmetrische belastingen</b>	<b>383</b>
4.2	Herverdeling van krachten	301	<b>4</b>	<b>Invloed van de symmetrie op krachtsverdeling en vervormingstoestand</b>	<b>385</b>
<b>5</b>	<b>Bezwijkbelasting van een ligger – bovengrensbepaling</b>	<b>313</b>	<b>5</b>	<b>Toepassingen</b>	<b>387</b>
5.1	Aanpak op basis van het bezwijkmechanisme	313	<b>6</b>	<b>Vraagstukken</b>	<b>399</b>
5.2	De bezwijkbelasting berekend met evenwichtsvergelijkingen	316		<b>Formules</b>	<b>405</b>
5.3	De bezwijkbelasting berekend met virtuele arbeid	320		<b>Trefwoordenregister</b>	<b>411</b>
5.4	Vraagstukken	328			
<b>6</b>	<b>Bezwijkanalyse van raamwerken - bovengrensbepaling</b>	<b>331</b>			
6.1	Uitgewerkte rekenvoorbeelden	332			
6.2	Elementaire bezwijkmechanismen	352			
6.3	Vraagstukken	355			

## Module 1 – Statisch onbepaalde constructies

## 1

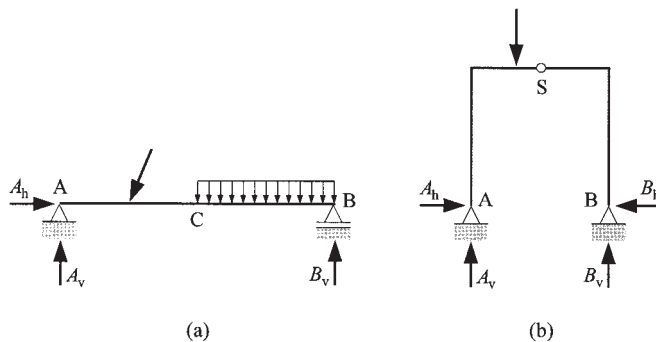
## Inleiding

Bij *statisch bepaalde constructies* kan de krachtsverdeling<sup>1</sup> direct uit het evenwicht worden afgeleid, zie figuur 1.1.

Bij *statisch onbepaalde constructies* is dat niet mogelijk: de evenwichtsvergelijkingen zijn niet meer toereikend om alle onbekende oplegreacties en snedekrachten te kunnen berekenen, zie figuur 1.2. Het aantal onbekenden blijkt groter dan het beschikbare aantal evenwichtsvergelijkingen. In dat geval zijn er oneindig veel oplossingen (krachtsverdelingen) die voldoen aan het evenwicht. De oplossing is nu niet eenduidig, maar *onbepaald*.

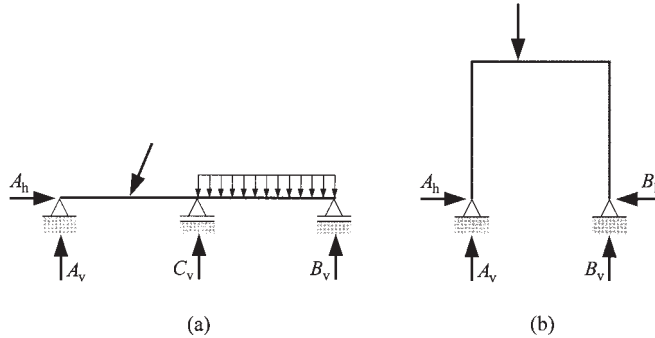
Om bij statisch onbepaalde constructies uit te vinden welke van al deze krachtsverdelingen de juiste is moet ook de *vervorming van de constructie* in de beschouwing worden betrokken.

De vervorming moet uiteraard het *materiaalgedrag* volgen (*constitutieve voorwaarden*) en verder moet de vervorming in overeenstemming zijn met de *samenhang in de constructie en de bewegingsvrijheid in de opleggingen* (*kinematische voorwaarden*).



**Figuur 1.1** Statisch bepaalde constructies: (a) vrij opgelegde ligger en (b) driescharnierspant. Oplegreacties en krachtsverdeling kunnen rechtstreeks uit het evenwicht worden gevonden en zijn onafhankelijk van de stijfheidsverhoudingen.

<sup>1</sup> Onder krachtsverdeling wordt verstaan het totaal aan oplegreacties en snedekrachten, of anders gezegd, de verzameling van afhankelijk veranderlijke krachtengrootheden.

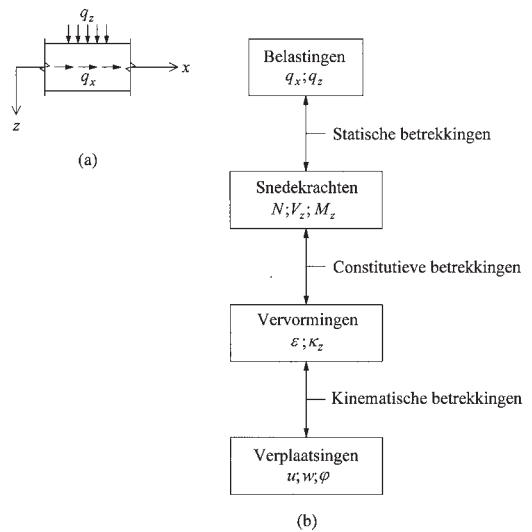


**Figuur 1.2** Statische onbepaalde constructies: (a) over drie steunpunten doorgaande ligger en (b) tweescharnieren-spant. Voor het berekenen van de oplegreacties en snedekrachten zijn de evenwichtsvergelijkingen niet meer toereikend. Ook de vervorming van de constructie moet in de beschouwing worden betrokken. De krachtsverdeling wordt beïnvloed door de stijfheidsverhoudingen.

Om de juiste krachtsverdeling bij statisch onbepaalde constructies te kunnen vinden zijn er naast het evenwicht dus extra voorwaarden waaraan moet worden voldaan. Voor het berekenen van de krachtsverdeling in statisch onbepaalde constructies staan dan ook de volgende *drie typen betrekkingen*<sup>1</sup> ter beschikking:

- a. de *statische betrekkingen*; zij geven betrekkingen tussen krachtengrootheden;
- b. de *constitutieve betrekkingen*; zij zijn afgeleid uit het materiaalgedrag, gegeven door de spanning-rek-relaties, en geven betrekkingen tussen krachten- en vervormingsgrootheden;
- c. de *kinematische betrekkingen*; zij geven betrekkingen tussen vervormings- en verplaatsingsgrootheden.

Ter illustratie zijn de drie basisbetrekkingen in figuur 1.3 in schema gebracht voor een op buiging en extensie belaste ligger.



**Figuur 1.3** (a) Verdeelde belastingen op een elementje uit een op buiging en extensie belaste ligger. (b) Schematische weergave van het verband tussen belasting en verplaatsing in het geval van buiging met extensie. Om dit verband te kunnen leggen moet men over alle drie typen basisbetrekkingen beschikken: de statische betrekkingen, constitutieve betrekkingen en kinematische betrekkingen.

<sup>1</sup> Eerder werden deze drie typen vergelijkingen in de vorm van *differentiaalbetrekkingen* afgeleid voor een op buiging en extensie belaste staaf. Zie TOEGEPASTE MECHANICA - deel 2, paragraaf 4.3.

ad a.

Tot de categorie van *statische betrekkingen* behoren onder meer:

- de formules voor het evenwicht van constructies of onderdelen daarvan;
- het beginsel van actie en reactie;
- de formules voor de snedekrachten gedefinieerd als de spanningsresultanten in een doorsnede;
- de relaties tussen statisch equivalente krachtersystemen.

De statische betrekkingen leggen dus een verband tussen krachtengrootheden onderling, waartoe worden gerekend verdeelde en geconcentreerde krachten, koppels en spanningen.

ad b.

De *constitutieve betrekkingen* geven het materiaalgedrag weer, meestal als een verband tussen spanningen en rekken. De beschouwing blijft hier beperkt tot een materiaal dat zich lineair elastisch gedraagt en de *wet van Hooke* volgt, die in zijn eenvoudigste vorm luidt:

$$\sigma = E\varepsilon$$

Meer generaliserend mag men voor een op extensie en buiging belaste staaf het verband tussen snedekrachten en vervormingsgrootheden ook een constitutieve betrekking noemen, zoals:

$$N = EA\varepsilon$$

$$M = EI\kappa$$

Algemeen kan men dan ook stellen dat de constitutieve betrekkingen op grond van het materiaalgedrag een verband leggen tussen krachtengrootheden en vervormingsgrootheden.

ad c.

De *kinematische betrekkingen* leggen een verband tussen verplaatsingen, rotaties, rekken, krommingen, enz. Hiertoe behoren onder meer:

- de formules voor rek en kromming, uitgedrukt in verplaatsingen en rotaties;
- de *vormveranderings- of aansluitvoorwaarden*, waarmee aan de vervormingen en verplaatsingen eisen worden gesteld met betrekking tot de samenhang in de constructie (*compatibiliteit*) en de bewegingsvrijheid in de oplettingen.

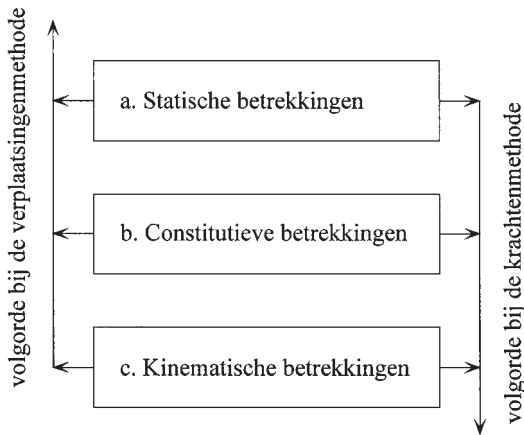
Kort samengevat: de kinematische betrekkingen leggen een verband tussen vervormingsgrootheden en verplaatsingsgrootheden.

De krachtsverdeling in een statisch bepaalde constructie is onafhankelijk van de constitutieve en kinematische betrekkingen en dus onafhankelijk van het materiaalgedrag. Voor de berekening van de krachtsverdeling in statisch bepaalde constructies zijn alleen de evenwichtsvergelijkingen nodig. De constitutieve en kinematische vergelijkingen worden alleen gebruikt om, als men daarin is geïnteresseerd, de vervormingen en verplaatsingen te berekenen.

Voor de berekening van de krachtsverdeling in statisch onbepaalde constructies zijn alle drie genoemde typen vergelijkingen nodig.

De verschillende berekeningsmethoden voor statisch onbepaalde constructies zijn globaal te rubriceren in drie groepen:

- *krachtenmethoden (flexibiliteitsmethoden)*
- *verplaatsingenmethoden (stijfheidsmethoden)*
- *gemengde methoden (hybride methoden)*



**Figuur 1.4** De drie typen vergelijkingen, nodig voor de berekening van de krachtsverdeling in statisch onbepaalde constructies, en de volgorde waarin zij worden toegepast bij respectievelijk de verplaatsingen- en krachtenmethode.

Een karakteristiek verschil tussen de krachten- en verplaatsingenmethode komt tot uiting in de volgorde waarin de drie typen vergelijkingen a t/m c aan de orde komen in de berekeningsprocedure, zie het schema in figuur 1.4.

Bij de krachtenmethode is de volgorde:  $a \rightarrow b \rightarrow c$ . Bij de verplaatsingenmethode is de volgorde omgekeerd:  $c \rightarrow b \rightarrow a$ .

De namen *krachtenmethode* en *verplaatsingenmethode* zijn ontleend aan de aard van de fundamentele onbekenden die in de eindvergelijkingen moeten worden opgelost: dat zijn krachtengrootheden in het geval van de krachtenmethode en verplaatsingsgrootheden in het geval van de verplaatsingenmethode.

Als de constructie zich lineair gedraagt<sup>1</sup> zijn de eindvergelijkingen lineair en kan gebruik worden gemaakt van het beginsel van superpositie. Bij de krachtenmethode kunnen de invloeden van belas-

ting en te berekenen krachtengrootheden op elkaar worden gesuperponeerd en bij de verplaatsingenmethode de invloeden van de verplaatsingen.

Hoewel de beginselen van beide methoden reeds lang bekend zijn is met de ontwikkeling van computerprogramma's de doorbraak van een formeel onderscheid tussen de krachten- en verplaatsingenmethode ontstaan.

De groep van *gemengde* of *hybride methoden* combineert elementen uit de krachten- en verplaatsingenmethode. Bij een gemengde methode heeft men in de eindvergelijkingen zowel krachtengrootheden als verplaatsingsgrootheden als onbekenden.

De gemengde methoden zijn ontstaan uit de behoefte om in een handberekening het aantal op te lossen vergelijkingen te beperken, al dan niet gecombineerd met een zekere systematiek voor bepaalde typen van constructies.

De strategie bij het berekenen van een statisch onbepaalde constructie wordt in sterke mate bepaald door de manier waarop de berekening wordt uitgevoerd: met de hand of met behulp van een computer.

Bij *handberekeningen* is het vooral van belang dat de hoeveelheid rekenwerk beperkt blijft. Bij *computergeoriënteerde berekeningsmethoden* bestaat de voorkeur voor een systematische en algemeen geldende aanpak.

Aan de hand van een aantal uitgewerkte voorbeelden wordt in hoofdstuk 2 de aanpak volgens de *krachtenmethode* toegelicht. Om de krachtenmethode handig toe te passen is inzicht nodig. De krachtenmethode heeft in het algemeen niet de systematiek die nodig is om er een computergeoriënteerde berekeningsmethode van te maken en is daarom een echte *handberekeningsmethode*.

<sup>1</sup> Dit is het geval als het materiaal lineair elastisch is (*fysisch lineair constructiegedrag*) en bovendien de invloed van de vervorming op de geometrie van de constructie zo gering is dat het evenwicht op de onvervormde constructie mag worden betrokken (*geometrisch lineair constructiegedrag*).

In hoofdstuk 3 wordt met de *hoekveranderingsvergelijkingen* een systematische aanpak gepresenteerd voor het berekenen van op buiging belaste statisch onbepaalde staafconstructies, zoals doorgaande liggers, portalen en raamwerken.

De methode met hoekveranderingsvergelijkingen is voor constructies met verplaatsbare knooppunten een *gemengde methode*. Voor constructies met niet-verplaatsbare knooppunten is het een *krachtenmethode*. Daarom is er voor gekozen de methode met hoekveranderingsvergelijkingen direct na de krachtenmethode te behandelen.

Vervolgens wordt in hoofdstuk 4 aan de hand van een aantal voorbeelden de aanpak volgens de verplaatsingenmethode toegelicht.

De verplaatsingenmethode blijkt een methode die zich goed leent voor een systematische aanpak en is daarom geschikt om te programmeren voor een

groot aantal constructietypen. Zo is de *eindigelementenmethode* ontstaan als een computergeoriënteerde berekeningsmethode, gebaseerd op de systematiek van de verplaatsingenmethode. In hoofdstuk 5 wordt de gedachtegang bij de eindigelementenmethode uiteengezet. Dit gebeurt aan de hand van een educatieve constructie opgebouwd uit elementen die bestaan uit op buiging belaste staven waarvan de uiteinden (knooppunten) wel kunnen roteren, maar niet kunnen verplaatsen.

Ten slotte wordt nog ingegaan op een aantal aspecten die in het bijzonder bij statisch onbepaalde constructies een rol spelen. Aan de orde komen *steunpuntszettingen* en *temperatuurinvloeden* in hoofdstuk 6, de invloed van *stijfheidsverschillen* in hoofdstuk 7 en van *verende verbindingen* in hoofdstuk 8.

Dit boek maakt deel uit van een serie mechanicastudieboeken voor de opleidingen Bouwkunde en Weg- en Waterbouwkunde (Civiele Techniek) in het hoger onderwijs (hbo en technische universiteit):

- Mechanica: Evenwicht
- Mechanica: Spanningen, vervormingen, verplaatsingen
- Mechanica: Statisch onbepaalde constructies en Bezwijkanalyse

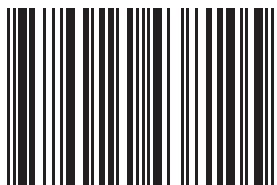
Dit derde deel uit de serie is opgebouwd uit drie modules waarin drie min of meer op zichzelf staande onderwerpen worden behandeld:

- Module 1 – Statische onbepaalde constructies
- Module 2 – Bezwijkanalyse
- Module 3 – Symmetrie

De behandeling blijft beperkt tot staafconstructies en handberekeningsmethoden. De theorie in de modules wordt ondersteund door vele figuren en voorbeelden, en is zo opgebouwd dat studenten de lesstof in principe zelfstandig door kunnen werken. Net zoals de andere delen biedt ook dit boek een groot aantal uitgewerkte voorbeelden en vraagstukken die zodanig zijn gestructureerd dat het doorwerken ervan resulteert in een kennismaking met talrijke aspecten van dit vakgebied.

Beide auteurs hebben jarenlange ervaring in het doceren en doseren van mechanicaonderwijs aan de opleiding Civiele Techniek van de Technische Universiteit Delft

ISBN 978-9024438105



9

789024 438105

[www.boomhogeronderwijs.nl](http://www.boomhogeronderwijs.nl)

